2009 개정 교육과정
인천광역시교육감 인정
고교-04-115-04-13

고|등|학|교

수학 Ⅱ

신항균
이광연
박세원
신범영
이계세
김정화
박문환
윤정호
박상의
서원호
전제동
이동흔

(주)지학사

교과서 물려주기 기록표					
연도	교과서 사용자				상태
	학년	반	번호	이름	

※ 상태 표기 예시: 매우 좋음, 좋음, 보통, 나쁨

고 | 등 | 학 | 교

수학 Ⅱ

(주)지학사

들어가는 말

수학은 오랜 옛날부터 문명의 발달에 핵심적인 역할을 해왔으며 앞으로도 이와 같은 수학의 역할은 더욱 확대될 것이다. 특히 현재의 지식 정보화 사회에서의 신기술은 수학의 뒷받침 없이는 얻어질 수 없다. 실제로 수학은 우주, 항공, 컴퓨터 과학과 같은 자연 과학은 물론이고 경제, 경영 등과 같은 인문 · 사회 과학에도 폭넓게 이용되고 있다. 또한 현대 문명을 합리적으로 운영하고 발전시켜 21세기를 살아가는 우리에게 창조적이고 논리적인 아이디어를 제공하는 기초가 되고 있다.

수학을 공부하는 목적은 단순히 수학의 기본 지식을 습득하는 데에서 벗어나 사물의 현상을 수학적으로 관찰하고 해석함으로써 실생활의 여러 가지 문제에 적극적으로 대처하고 합리적이고 논리적으로 해결하는 능력을 기르는 데 있다.

이런 목적을 달성하기 위하여 이 책은 전인적 성장의 기반 위에 개성의 발달과 진로를 개척하는 사람, 기초 능력의 바탕 위에 새로운 발상과 도전으로 창의성을 발휘하는 사람, 문화적 소양과 다원적 가치에 대한 이해를 바탕으로 품격 있는 삶을 영위하는 사람, 세계와 소통하는 시민으로서 배려와 나눔의 정신으로 공동체 발전에 참여하는 사람을 육성하려는 마음가짐으로 새롭게 개정된 교육과정에 맞게 만들었다.

특히 학생들이 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 현상을 수학적으로 생각하고, 주어진 문제를 창의적이고 합리적으로 해결하는 능력을 기를 수 있도록 하기 위하여 다음과 같은 사항에 중점을 두고 엮었다.

첫째, 수학적 개념과 원리를 이해하고 기초 계산을 숙달하게 할 뿐만 아니라 학생의 추론 능력, 문제 해결 능력 그리고 의사소통 능력을 발달시킬 수 있도록 하였다.

둘째, 생각 열기를 통하여 자신을 둘러싼 세계에 대한 경험을 토대로 다양한 문화와 가치에 대한 이해를 넓히고, 탐구 활동을 통하여 스스로 수학을 체험하게 함으로써 학생들이 자연스럽게 수학적 내용을 이해할 수 있도록 하였다.

셋째, 심신의 건강하고 조화로운 발달을 추구하며, 다양한 분야의 경험과 지식을 익혀 적극적으로 진로를 탐색할 수 있도록 하였으며, 흥미와 더불어 수학의 아름다움을 발견하고 수학의 유용성을 느낄 수 있도록 하였다.

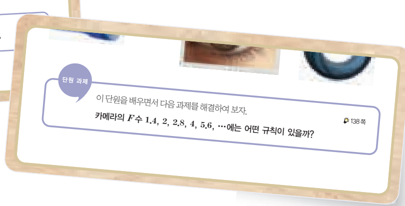
본래 수학은 암기만으로는 좋은 학습 성과를 거둘 수 없고, 학생 스스로가 문제를 해결하고자 노력할 때 비로소 원리나 법칙 등이 심도 있게 이해되고 학습에 흥미도 느끼게 되는 과목이다. 이 책이 스스로 문제를 해결하려는 학생들에게 좋은 길잡이가 되기를 기대한다. 또 이 책으로 수학 실력을 키워 오늘날의 정보화와 세계화 시대에 걸맞은 창조적이고 지혜로운 사람으로 성장하기 바란다.

지은이 씀

이 책의 짜임새

대 단 원 　도 입

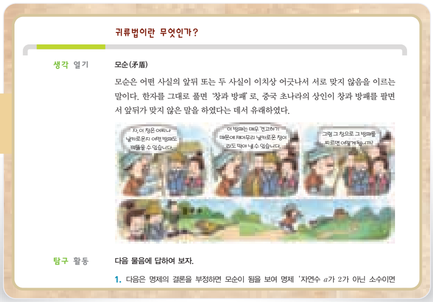
단원과 관련된 사진을 제시하고 관련 내용을 소개함으로써 단원 학습의 흥미와 관심을 높였다. 또 앞서 배운 내용과 단원의 연계성 확인을 위한 문제를 제시하였다.



중 단 원 　도 입

새로운 학습을 시작하면서 다른 교과나 실생활과 관련된 내용을 스토리텔링 형식으로 소개하고 수학적 사고를 유발하는 물음을 제시하여 학습 동기를 유발하도록 하였다.

본 문 전 개



귀류법이란 무엇인가?

생각 열기

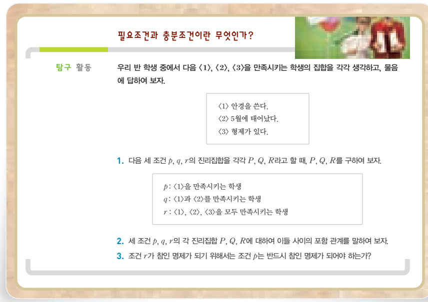
모순(矛盾)

모순은 어떤 사실의 앞뒤 또는 두 사실이 이치상 어긋나서 서로 맞지 않음을 이르는 말이다. 한자를 그대로 풀면 '창과 방패'로, 중국 초나라의 상인이 창과 방패를 팔면서 앞뒤가 맞지 않은 말을 하였다는 데서 유래하였다.

탐구 활동

다음 물음에 답하여 보자.

1. 다음은 명제의 결론을 부정하면 모순이 됨을 보여 명제 '자연수 a가 2가 아닌 소수이면



필요조건과 충분조건이란 무엇인가?

탐구 활동

우리 반 학생 중에서 다음 (1), (2), (3)을 만족시키는 학생의 집합을 각각 생각하고, 물음에 답하여 보자.

(1) 안경을 쓴다.
(2) 5월에 태어났다.
(3) 형제가 있다.

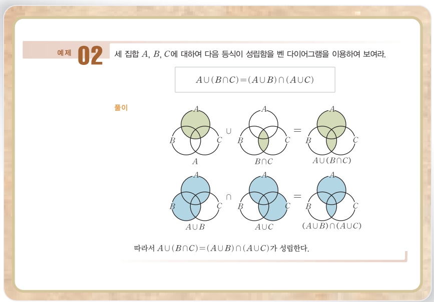
1. 다음 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라고 할 때, P, Q, R를 구하여 보자.

p: (1)을 만족시키는 학생
q: (1)과 (2)를 만족시키는 학생
r: (1), (2), (3)을 모두 만족시키는 학생

2. 세 조건 p, q, r의 각 진리집합 P, Q, R에 대하여 이들 사이의 포함 관계를 말하여 보자.
3. 조건 r가 참인 명제가 되기 위해서는 조건 p는 반드시 참인 명제가 되어야 하는가?

생각 열기 / 탐구 활동

본격적인 학습에 앞서 스토리텔링으로 흥미를 이끌어 내고, 새로 도입할 수학 원리의 탐구를 통해 학습 내용의 실마리를 제공하였다.

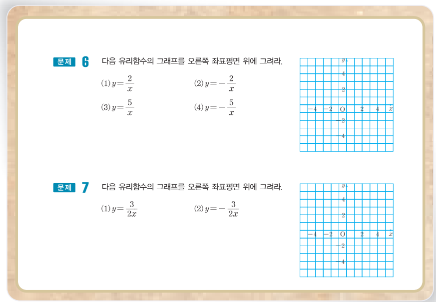


예제 02 세 집합 A, B, C에 대하여 다음 등식이 성립함을 벤 다이어그램을 이용하여 보여라.

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

풀이

따라서 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$가 성립한다.



문제 6 다음 유리함수의 그래프를 오른쪽 좌표평면 위에 그려라.

(1) $y=\frac{2}{x}$ (2) $y=-\frac{2}{x}$
(3) $y=\frac{5}{x}$ (4) $y=-\frac{5}{x}$

문제 7 다음 유리함수의 그래프를 오른쪽 좌표평면 위에 그려라.

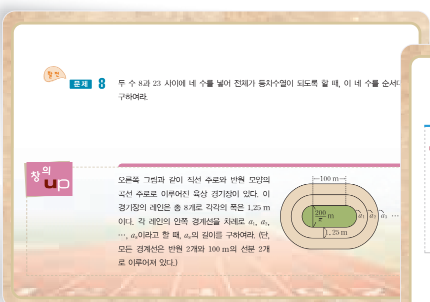
(1) $y=\frac{3}{2x}$ (2) $y=-\frac{3}{2x}$

예제 / 문제

대표적인 유형의 문제로 개념 이해를 탄탄히 하고, 유사 문제를 해결할 수 있도록 하였다.

창의 UP / 사고력 기르기 / 단원 과제

수학의 개념을 깊이 생각하고 표현함으로써 창의력을 높이며, 추론, 의사소통, 문제 해결의 세 유형으로 사고력을 기르고, 중단원 도입과 관련한 구체적인 문제를 통해 생활에 적용되는 수학을 직접 느낄 수 있도록 하였다.



문제 8 두 수 8과 23 사이에 네 수를 넣어 전체가 등차수열이 되도록 할 때, 이 네 수를 순서대로 구하여라.

창의 up

오른쪽 그림과 같이 직선 주로와 반원 모양의 곡선 주로로 이루어진 육상 경기장이 있다. 이 경기장의 레인은 총 8개로 각각의 폭은 1.25 m이다. 각 레인의 안쪽 경계선을 차례로 a_1, a_2, $\cdots$, a_8이라고 할 때, a_n의 길이를 구하여라. (단, 모든 경계선은 반원 2개와 100 m의 선분 2개로 이루어져 있다.)

사고력 기르기

다음 중에서 누구의 말이 옳은지 토의하고, 그 근거를 제시하여 보자.

문제 4 명제 '자연수 a, b에 대하여 ab가 홀수이면 a, b는 모두 홀수이다.'가 참임을 귀류법으로 증명하여라.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

어떤 사건에 대하여 네 명의 용의자 A, B, C, D를 조사한 결과 다음과 같은 사실을 알아내었다. 진짜 범인을 모두 찾아라.

ㄱ. B가 범인이 아니거나 D가 범인이 아니면 A는 범인이다.
ㄴ. A가 범인이면 B도 범인이다.
ㄷ. C가 범인이면 B는 범인이 아니다.
ㄹ. A가 범인이 아니거나 C가 범인이면 D도 범인이 아니다.

중단원 마무리

학생의 학습 수준에 맞추어 문제를 선택하여 풀게 함으로써 수준별 학습이 가능하도록 하였고, 문제와 관련된 소단원명과 학습 요소를 제시하여 본문과의 연계성을 살리고 학생 스스로 부족한 부분을 찾아 보충할 수 있도록 하였다.

대단원 마무리

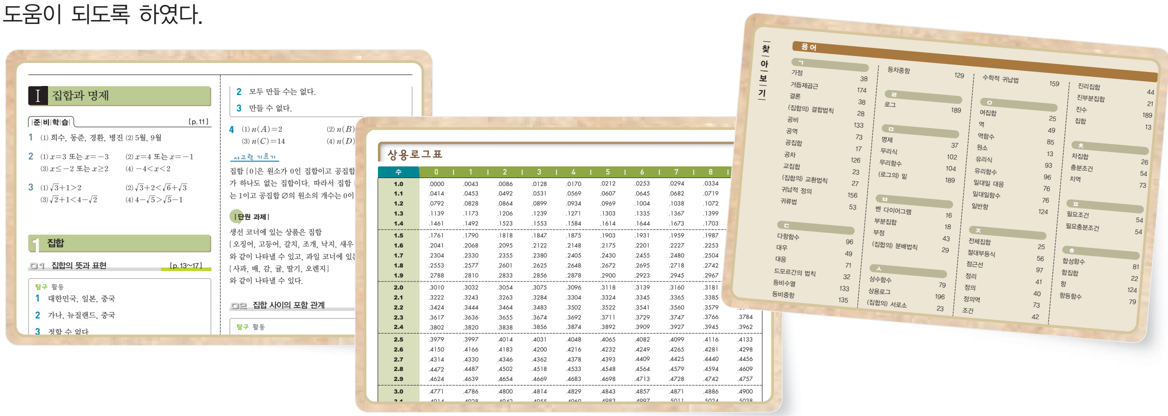
대단원 학습을 마친 후 다양한 주제에 대한 탐구로 종합적인 문제 해결력을 신장하도록 하였고, 단원에서 배운 내용을 요약 · 정리하여 학습 내용을 상기할 수 있도록 하였으며, 대단원 학습 내용을 총망라한 다양한 평가 문제를 제시하였다.

수학 플러스

교육부에서 발표한 수학 교육 선진화 방안에서 강조하는 STEAM과 관련하여 수학과 과학, 기술, 공학, 예술, 문학, 실생활, 역사 이야기 등을 소개함으로써 단원의 학습에 대한 폭넓은 이해와 확장이 가능하도록 하였다.

부록

교과서의 문제에 대한 해답을 제공하여 스스로 해결한 문제가 옳은지 확인할 수 있도록 하였다. 또 본문의 내용을 학습할 때 요구되는 여러 가지 값을 표로 제시하였다. 아울러 본문에 등장한 여러 가지 수학 용어와 기호를 찾아보기로 제공하여 학습에 도움이 되도록 하였다.



교과서 속 아이콘 활용

중③ 선수 학습 내용

보기 구체적인 예시

 계산기 활용 문제

주의 주의할 점

실생활 실생활 문제

참고 참고할 사항

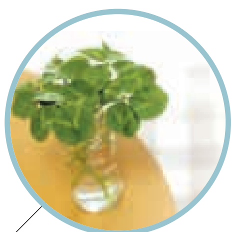
발전 발전 문제

차례

I 집합과 명제

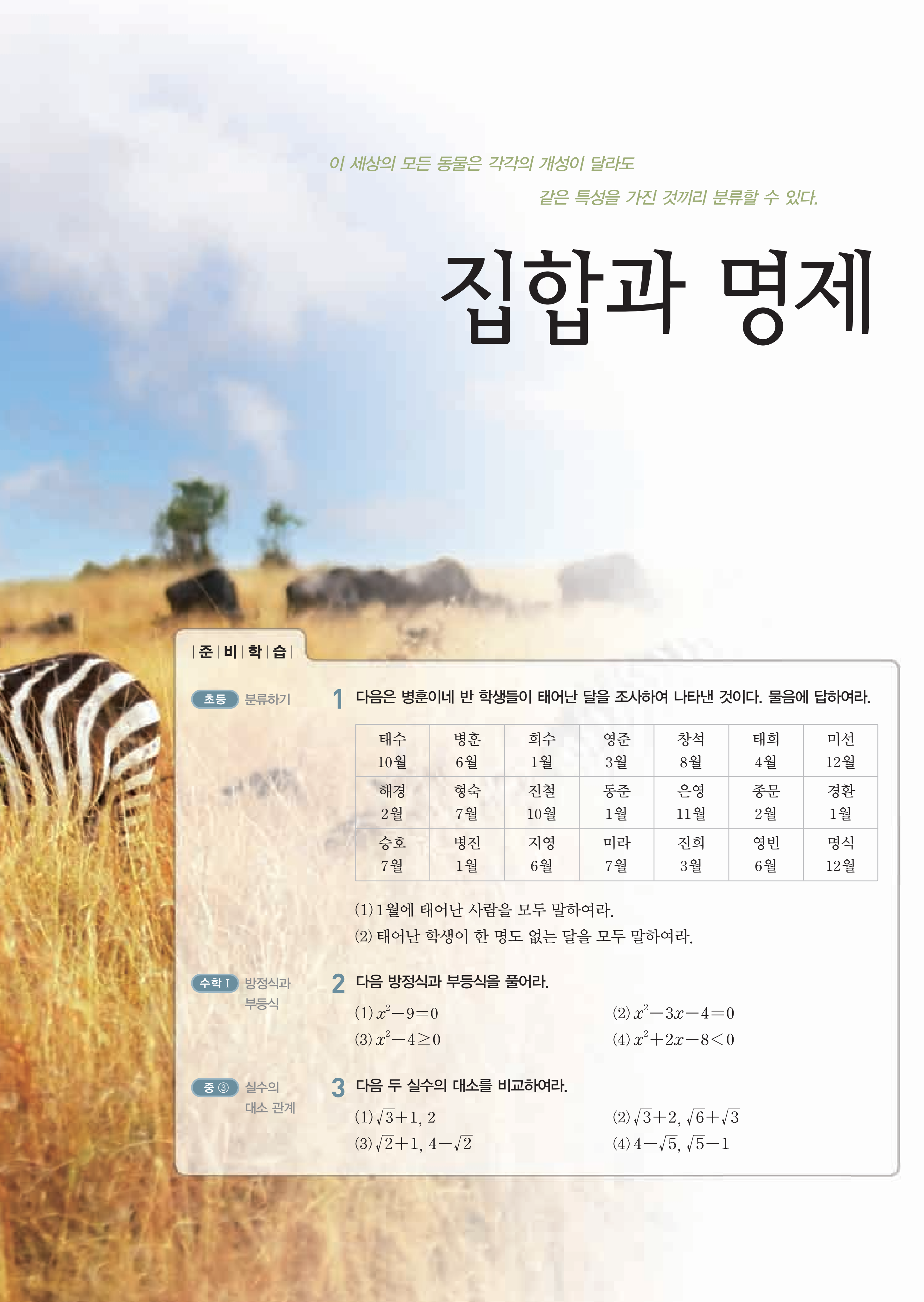
II 함수

III 수열



IV 지수와 로그

* 부록



이 세상의 모든 동물은 각각의 개성이 달라도
같은 특성을 가진 것끼리 분류할 수 있다.

집합과 명제

준비학습

초등 분류하기

1 다음은 병훈이네 반 학생들이 태어난 달을 조사하여 나타낸 것이다. 물음에 답하여라.

태수 10월	병훈 6월	희수 1월	영준 3월	창석 8월	태희 4월	미선 12월
해경 2월	형숙 7월	진철 10월	동준 1월	은영 11월	종문 2월	경환 1월
승호 7월	병진 1월	지영 6월	미라 7월	진희 3월	영빈 6월	명식 12월

(1) 1월에 태어난 사람을 모두 말하여라.
(2) 태어난 학생이 한 명도 없는 달을 모두 말하여라.

수학 I 방정식과 부등식

2 다음 방정식과 부등식을 풀어라.

(1) $x^2-9=0$　　(2) $x^2-3x-4=0$
(3) $x^2-4\geq0$　　(4) $x^2+2x-8<0$

중 ③ 실수의 대소 관계

3 다음 두 실수의 대소를 비교하여라.

(1) $\sqrt{3}+1$, 2　　(2) $\sqrt{3}+2$, $\sqrt{6}+\sqrt{3}$
(3) $\sqrt{2}+1$, $4-\sqrt{2}$　　(4) $4-\sqrt{5}$, $\sqrt{5}-1$

1

집합

생선을 사려면…….

우리나라 속담에 "어물전 망신은 꼴뚜기가 시킨다."라는 말이 있다. 이 속담에 나오는 어물전은 무엇을 하는 곳이었을까?

예로부터 우리 선조들은 5일이나 7일에 한 번, 일정한 장소에 모여 물건을 사고파는 장을 열어 왔다. 장에서는 비슷한 종류의 상품을 모아 판매를 하였는데, 위의 속담에 나오는 어물전은 각종 생선과 조개 등을 파는 곳이었다. 또 포목전은 비단을 포함한 각종 옷감을 파는 곳이었고, 옹기전은 간장이나 된장 등을 담아 보관하는 옹기를 파는 곳이었다.

이와 같이 특성이 같은 상품끼리 분류하여 판매하면 한 장소에서 다양한 상품을 비교하며 살 수 있기 때문에 판매자뿐만 아니라 물건을 사는 소비자들에게도 편리하다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 17쪽

상품의 분류에는 수학의 어떤 내용이 숨어 있을까?

01 집합의 뜻과 표현

● 집합의 개념을 이해하고, 집합을 표현할 수 있다.

집합이란 무엇인가?

생각 열기 **태권도**

태권도는 우리나라 전통 무술로서 세계 여러 나라에 보급되어 태권도 대회에 참가하는 외국 선수들이 해마다 늘고 있다. 1988년 서울 올림픽 대회 때 시범 종목으로 채택된 후 2000년 시드니 올림픽 대회 때부터 정식 종목으로 채택되었다.

탐구 활동 **어느 세계 태권도 대회에 다음과 같은 총 8개 나라가 참가하였다. 이 대회에 참가한 나라에 대하여 물음에 답하여 보자.**

가나 뉴질랜드 대한민국 독일

일본 중국 캐나다 프랑스

1. 아시아 지역에서 참가한 나라는 어느 나라인가?

2. 국기에 별 모양이 들어 있는 나라는 어느 나라인가?

3. 국기가 멋진 나라는 어느 나라인가?

탐구 활동에서 어느 세계 태권도 대회에 아시아 지역에서 참가한 나라는 대한민국, 일본, 중국임을 분명히 알 수 있다.

이와 같이 주어진 조건에 의하여 그 대상을 분명히 알 수 있는 것들의 모임을 **집합**이라 하고, 집합을 이루는 대상 하나하나를 그 집합의 **원소**라고 한다.

한편 국기가 멋진 나라의 모임은 '멋지다'는 기준이 분명하지 않아 그 대상을 정할 수 없으므로 집합이 아니다.

보기 '10보다 작은 홀수의 모임'은 그 대상이 1, 3, 5, 7, 9로 분명하므로 집합이고, 이 집합의 원소는 1, 3, 5, 7, 9이다.

문제 1 다음 중에서 집합인 것을 모두 찾고, 그 원소를 말하여라.

특별한 언급이 없는 한 일반적으로 '약수'는 양의 약수를 의미한다.

(1) 15의 약수의 모임

(2) 10에 가까운 수의 모임

(3) 재미있는 놀이 기구의 모임

(4) 우리 반 학생 중에서 3월에 태어난 학생의 모임

집합과 원소 사이의 관계를 나타내는 방법을 알아보자.

a가 집합 A의 원소일 때, a는 집합 A에 속한다고 하며, 이것을 기호로

$$a \in A$$

와 같이 나타낸다.

$\underbrace{a}_{\text{원소}} \in \underbrace{A}_{\text{집합}}$

$\in$는 영어 단어 Element (원소)의 첫 글자를 기호화한 것이다.

E → ∈ → ∈

또 b가 집합 B의 원소가 아닐 때, b는 집합 B에 속하지 않는다고 하며, 이것을 기호로

$$b \notin B$$

와 같이 나타낸다.

예를 들어 8의 약수의 집합을 A라고 하면 1, 2, 4, 8은 집합 A의 원소이므로

$$1 \in A,\ 2 \in A,\ 4 \in A,\ 8 \in A$$

와 같이 나타낸다. 그러나 3, 5는 집합 A의 원소가 아니므로

$$3 \notin A,\ 5 \notin A$$

와 같이 나타낸다.

참고 집합을 나타낼 때에는 보통 알파벳 대문자를 사용하고, 원소를 나타낼 때에는 알파벳 소문자를 사용한다.

문제 2 3의 배수의 집합을 A라고 할 때, 다음 □ 안에 기호 $\in$, $\notin$ 중에서 알맞은 것을 써넣어라.

(1) 6 □ A (2) 8 □ A

(3) 33 □ A (4) 200 □ A

집합은 어떻게 나타내는가?

생각 열기

사물놀이

사물놀이란 꽹과리, 징, 장구, 북의 네 가지 민속 타악기를 가지고 어울려 치는 음악 또는 그 음악에 의한 놀이를 말한다. 사물놀이는 1978년 '사물놀이'라는 이름으로 결성된 농악 연주 단체에 의하여 처음으로 소개되었으며, 그 후 점차 보급되어 국내는 물론 국제적으로도 널리 알려지게 되었다. 최근에는 재즈, 오케스트라 등과의 협연을 통하여 그 영역을 넓히고 있으며 외국에서의 공연으로 우리나라 민속 음악을 소개하는 데 공헌하고 있다.

탐구 활동

다음은 우리나라 고유의 악기들이다. 물음에 답하여 보자.

- 관악기: 입으로 불어서 관 안의 공기를 진동시켜 소리를 내는 악기

1. 위의 악기 중에서 관악기를 찾아보자.
2. 꽹과리, 징, 장구, 북으로 이루어진 집합에서 원소들의 공통된 성질은 무엇인가?

- 집합에 속하는 모든 원소를 { } 안에 나열하여 집합을 나타내는 방법을 원소나열법이라고 한다.

- 집합 $\{1, 2, 3\}$을 $\{3, 2, 1\}$과 같이 나타내어도 되지만 $\{1, 1, 2, 3\}$과 같이 나타내지는 않는다.

집합을 나타내는 방법에는 그 집합에 속하는 원소를 { } 안에 모두 써서 나타내는 방법이 있다.

예를 들어 원소가 1, 2, 3, 6인 집합은

$$\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$$

과 같이 나타낸다.

이와 같은 방법으로 집합을 나타낼 때, 원소의 나열 순서는 바꾸어도 되지만 같은 원소는 중복하여 쓰지 않는다.

또 집합의 원소가 많고 원소 사이에 일정한 규칙이 있을 때에는 그 원소 중에서 일부를 생략하고, '…'을 사용하여 나타낸다.

보기 100 이하의 자연수의 집합은 $\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$과 같이 나타낼 수 있다.

집합에 속하는 모든 원소들이 가지는 공통된 성질을 제시하여 집합을 나타내는 방법을 조건제시법이라고 한다.

집합을 나타내는 또 다른 방법으로 그 집합의 원소들이 가지는 공통된 성질을 제시하여 나타내는 방법이 있다.

예를 들어 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$을 각 원소들이 가지는 공통된 성질을 제시하여

$$\{x \mid x\text{는 } 6\text{의 약수}\}$$

와 같이 나타낼 수 있다.

원소를 대표하는 기호

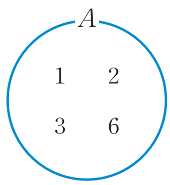
$\{\,x \mid \underline{x\text{는 } 6\text{의 약수}}\,\}$

원소들이 가지는 공통된 성질

보기 집합 $\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$은 $\{x \mid x$는 7 이하의 홀수$\}$ 또는 $\{x \mid x$는 8보다 작은 홀수$\}$ 등으로 나타낼 수 있다.

벤 다이어그램은 19세기 영국의 논리학자 벤(Venn, J. ; 1834～1923)이 창안한 그림이다.

집합을 나타낼 때에는 그림을 이용하기도 한다. 예를 들어 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$을 오른쪽 그림과 같이 나타낼 수 있다. 이와 같이 집합을 나타내는 그림을 **벤 다이어그램**이라고 한다.



문제 3 다음 집합을 벤 다이어그램으로 나타내어라.

(1) $A=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$

(2) $B=\{x \mid x$는 10의 약수$\}$

집합의 종류에는 어떤 것들이 있는가?

탐구 활동

다음 그림을 보고, 물음에 답하여 보자.

1. 수준이는 몇 장의 수 카드를 만들어야 하는가?
2. 성실이가 수 카드를 모두 만들 수 있을지 생각하여 보자.
3. 기찬이가 수 카드를 실제로 만들 수 있을지 생각하여 보자.

원소가 유한개인 집합을 유한집합이라 하고, 원소가 무한히 많은 집합을 무한집합이라고 한다.

집합은 원소의 개수에 따라 원소가 유한개인 집합과 원소가 무한히 많은 집합으로 분류할 수 있다.

예를 들어 8의 약수의 집합 $\{1, 2, 4, 8\}$은 원소가 유한개이고, 자연수의 집합 $\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$는 원소가 무한히 많다.

한편 1보다 작은 홀수의 집합과 같이 원소가 하나도 없는 집합을 **공집합**이라고 하며, 이것을 기호로

$$\varnothing$$

과 같이 나타낸다.

집합 A의 원소가 유한개일 때, 그 개수를 0 또는 자연수로 나타낼 수 있다. 이때 집합 A의 원소의 개수를 기호로

$$n(A)$$

와 같이 나타낸다.

$n(\varnothing)=0$

보기 (1) 집합 $A=\{0, 1, 2\}$일 때, $n(A)=3$이다.
(2) 집합 $B=\{4, 8, 12, 16, \cdots, 40\}$일 때, $n(B)=10$이다.
(3) 집합 $C=\{x \mid x$는 4보다 크고 5보다 작은 자연수$\}$일 때, $n(C)=0$이다.

문제 4 다음 집합의 원소의 개수를 구하여라.

(1) $A=\{a, b\}$
(2) $B=\{x \mid x$는 18의 약수$\}$
(3) $C=\{7, 14, 21, 28, \cdots, 98\}$
(4) $D=\{x \mid x$는 5보다 큰 5의 약수$\}$

사고력 기르기

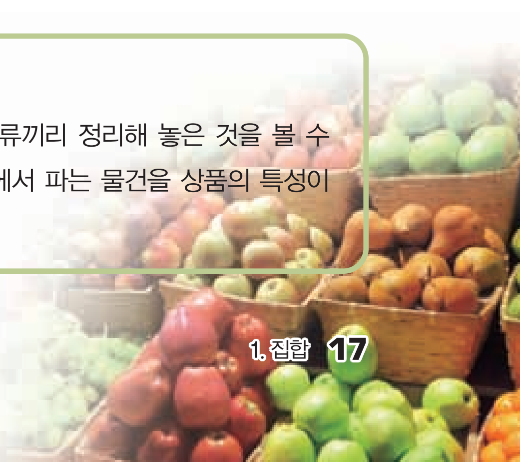
추론
▶ 의사소통
문제 해결

두 집합 $\{0\}$과 $\varnothing$의 차이점을 말하여 보자.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

슈퍼마켓에 가면 상품을 손쉽게 찾을 수 있도록 같은 종류끼리 정리해 놓은 것을 볼 수 있는데 이는 집합과 관련지어 생각할 수 있다. 슈퍼마켓에서 파는 물건을 상품의 특성이 같은 것끼리 분류하여 집합으로 나타내어 보자.



02 집합 사이의 포함 관계

● 두 집합 사이의 포함 관계를 이해한다.

부분집합이란 무엇인가?

생각 열기

특별 교실

학생들의 다양한 교육 활동을 위하여 학교에 만들어 놓은 특별 교실을 지역 주민에게 개방하는 학교가 많아졌다. 이들 학교에서는 학생들이 이용하는 시간대를 피하여 특별 교실에서 컴퓨터 교육이나 제과 강습과 같이 주민들에게 필요한 프로그램을 운영한다고 한다.

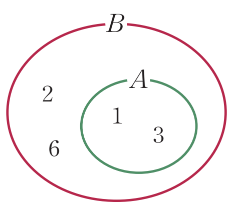
탐구 활동

오른쪽 표는 소연이네 학교에 있는 특별 교실의 위치를 층별로 나타낸 것이다. 1층에 있는 특별 교실의 집합을 A, 표에 나타낸 모든 특별 교실의 집합을 B라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

층	특별 교실
1	가사실, 독서실
2	과학실, 영어실
3	음악실, 미술실

1. 집합 A와 집합 B에 속하는 원소를 $\{\ \}$ 안에 모두 써서 각각 나타내어 보자.
2. 집합 A의 모든 원소는 집합 B에 속하는가?

두 집합 $A=\{1,\ 3\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$을 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽 그림과 같고, 집합 A의 모든 원소는 집합 B에 속한다.



이와 같이 집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속할 때, 집합 A를 집합 B의 **부분집합**이라고 하며, 이것을 기호로

$$A\subset B$$

와 같이 나타낸다.

집합 A가 집합 B의 부분집합일 때, '집합 A는 집합 B에 포함된다.' 또는 '집합 B는 집합 A를 포함한다.'고 한다.

한편 집합 A가 집합 B의 부분집합이 아닐 때, 이것을 기호로

$$A \not\subset B$$

와 같이 나타낸다.

두 집합 A, B에 대하여 $A \not\subset B$이고 $B \not\subset A$일 때, 두 집합 사이의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같이 두 가지 경우가 있다.

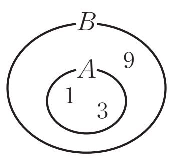
예제 01 다음 두 집합을 벤 다이어그램으로 나타내고, 두 집합 사이의 포함 관계를 기호 $\subset$ 또는 $\not\subset$를 써서 나타내어라.

(1) $A=\{1, 3\}$, $B=\{x \mid x$는 9의 약수$\}$

(2) $C=\{1, 2, 4, 8\}$, $D=\{4, 8, 12\}$

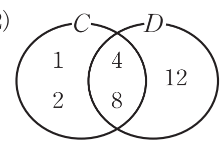
(3) $E=\{x \mid x$는 4의 약수$\}$, $F=\{x \mid x$는 20 이하의 5의 배수$\}$

풀이 (1)



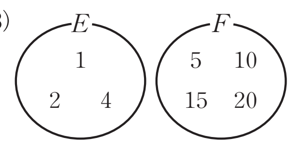
$A \subset B$

(2)



$C \not\subset D$ $(D \not\subset C)$

(3)



$E \not\subset F$ $(F \not\subset E)$

문제 1 다음 $\square$ 안에 기호 $\subset$, $\not\subset$ 중에서 알맞은 것을 써넣어라.

(1) $\{1, 2\}\ \square\ \{1, 2, 3\}$

(2) $\{4, 5, 6\}\ \square\ \{3, 6, 9\}$

(3) $\{x \mid x$는 6의 약수$\}\ \square\ \{x \mid x$는 12의 약수$\}$

(4) $\{x \mid x$는 10보다 작은 홀수$\}\ \square\ \{x \mid x$는 10보다 작은 짝수$\}$

모든 집합은 자기 자신의 부분집합이다. 한편, 공집합은 모든 집합의 부분집합으로 정한다. 즉, 집합 A에 대하여

$$A \subset A, \quad \varnothing \subset A$$

이다.

문제 2 다음 중에서 집합 $\{2, 4, 6, 8\}$의 부분집합을 모두 찾아라.

㉠ $\{2, 6\}$	㉡ $\{2, 5, 8\}$
㉢ $\{2, 4, 6, 8\}$	㉣ $\varnothing$

예제 02 집합 $\{a, b, c\}$의 부분집합을 모두 구하여라.

원소의 개수에 따라 부분집합을 찾는다.

풀이 원소가 0개인 부분집합: $\varnothing$
원소가 1개인 부분집합: $\{a\}, \{b\}, \{c\}$
원소가 2개인 부분집합: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$
원소가 3개인 부분집합: $\{a, b, c\}$
따라서 구하는 부분집합은 $\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$이다.

답 $\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$

문제 3 다음 집합의 부분집합을 모두 구하여라.

(1) {비, 눈}   (2) $\{1, 2, 3\}$

두 집합이 같다는 것은 무엇을 뜻하는가?

탐구 활동 다음 그림을 보고, 물음에 답하여 보자.

1. 정우가 탄 놀이 기구들의 집합을 A, 민정이가 탄 놀이 기구들의 집합을 B라고 할 때, 집합 A와 집합 B에 속하는 원소를 { } 안에 모두 써서 각각 나타내어 보자.

2. 집합 A의 모든 원소는 집합 B에 속하는가? 또 집합 B의 모든 원소는 집합 A에 속하는가?

두 집합

$$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\},\ B=\{x \mid x\text{는 } 10 \text{ 미만의 짝수}\}$$

에서 집합 B에 속하는 원소를 $\{\quad\}$ 안에 모두 써서 나타내면

$$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$$

이므로 집합 A와 집합 B의 원소는 모두 같다.

이와 같이 두 집합 A, B의 원소가 모두 같을 때, 두 집합 A, B는 같다고 하며, 이것을 기호로

$$\boldsymbol{A=B}$$

와 같이 나타낸다.

두 집합 A, B에 대하여 $A\subset B$이고 $B\subset A$이면 $A=B$이다.

한편 두 집합 A, B가 같지 않을 때, 이것을 기호로

$$\boldsymbol{A\neq B}$$

와 같이 나타낸다.

문제 4 다음 $\square$ 안에 기호 $=$, $\neq$ 중에서 알맞은 것을 써넣어라.

(1) $\{1\}\ \square\ \{0\}$

(2) $\{2,\ 4,\ 6\}\ \square\ \{6,\ 4,\ 2\}$

(3) $\{x \mid x\text{는 } 10 \text{ 이하의 홀수}\}\ \square\ \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$

(4) $\{3,\ 6,\ 9,\ \cdots\}\ \square\ \{x \mid x\text{는 } 3\text{의 배수}\}$

두 집합 A, B가 같지 않고 집합 A가 집합 B의 부분집합일 때, 즉

$$A\neq B\text{이고 } A\subset B$$

일 때, 집합 A를 집합 B의 **진부분집합**이라고 한다.

보기 집합 $A=\{1,\ 2\}$의 부분집합을 모두 구하면 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,\ 2\}$이다. 이때 부분집합 $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$는 집합 A의 진부분집합이다.

문제 5 두 집합 A, B에 대하여 A가 B의 진부분집합인지 아닌지 말하여라.

(1) $A=\{\text{미, 솔}\}$, $B=\{\text{도, 미, 솔}\}$

(2) $A=\{x \mid x\text{는 } 3\text{의 약수}\}$, $B=\{x \mid x\text{는 } 5\text{보다 작은 홀수}\}$

03

집합의 연산

● 집합의 연산을 할 수 있다.

합집합과 교집합이란 무엇인가?

생각 열기 **반려동물**

동물 행동학자 로렌츠(Lorenz, K. Z. ; 1903~1989)는 애완동물을 사람들과 함께 살아간다는 의미에서 반려동물이라고 부를 것을 제안하였다. 이 주장에는 사람과 동물은 사랑을 주고받으며 더불어 살아가는 동등한 존재라는 의미가 깔려 있다.

탐구 활동 **다음 그림을 보고, 물음에 답하여 보자.**

1. 정미가 기르고 싶어 하거나 준호가 기르고 싶어 하는 동물을 모두 말하여 보자.

2. 정미도 기르고 싶어 하고 준호도 기르고 싶어 하는 동물을 모두 말하여 보자.

탐구 활동에서 정미가 기르고 싶어 하는 동물의 집합을 A라 하고, 준호가 기르고 싶어 하는 동물의 집합을 B라고 하면

$$A=\{\text{개, 토끼, 앵무새}\},\ B=\{\text{개, 고양이, 열대어, 토끼}\}$$

이다. 이때 집합 A에 속하거나 집합 B에 속하는 모든 원소로 이루어진 집합은

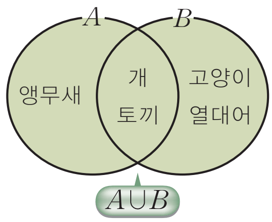
$$\{\text{개, 토끼, 앵무새, 고양이, 열대어}\}$$

이다.

이와 같이 두 집합 A, B에 대하여 A에 속하거나 B에 속하는 모든 원소로 이루어진 집합을 A와 B의 **합집합**이라고 하며, 이것을 기호로

$$A \cup B$$

와 같이 나타낸다.



두 집합 A와 B의 합집합을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

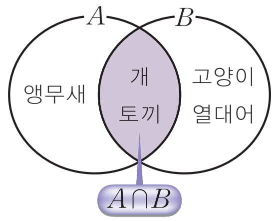
$$A\cup B=\{x\,|\,x\in A \text{ 또는 } x\in B\}$$

한편 집합 A에도 속하고 집합 B에도 속하는 모든 원소로 이루어진 집합은

$$\{\text{개, 토끼}\}$$

이다.

이와 같이 두 집합 A, B에 대하여 A에도 속하고 B에도 속하는 모든 원소로 이루어진 집합을 A와 B의 **교집합**이라고 하며, 이것을 기호로



$$\boldsymbol{A\cap B}$$

와 같이 나타낸다.

두 집합 A와 B의 교집합을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A\cap B=\{x\,|\,x\in A \text{ 그리고 } x\in B\}$$

특히 두 집합 A와 B 사이에 공통인 원소가 없을 때, 즉

$$A\cap B=\varnothing$$

일 때, 집합 A와 집합 B는 **서로소**라고 한다.

$A\cap\varnothing=\varnothing$이므로 $\varnothing$은 모든 집합과 서로소이다.

중 ① 자연수에서는 최대 공약수가 1인 두 수를 서로소라고 한다.

보기 (1) 두 집합 $A=\{3, 6, 9\}$, $B=\{3, 4, 5, 6\}$에 대하여

$A\cup B=\{3, 4, 5, 6, 9\}$, $A\cap B=\{3, 6\}$

(2) 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{x\,|\,x\text{는 6의 배수}\}$에 대하여

$A\cap B=\varnothing$이므로 집합 A와 집합 B는 서로소이다.

문제 1 다음 두 집합 A, B에 대하여 $A\cup B$와 $A\cap B$를 구하고, 두 집합 A, B가 서로소인 것을 찾아라.

(1) $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{3, 4, 5\}$

(2) $A=\{x\,|\,x\text{는 8의 약수}\}$, $B=\{x\,|\,x\text{는 10의 약수}\}$

(3) $A=\{a, b, c\}$, $B=\{c, d, e, f\}$

(4) $A=\{2, 4, 6\}$, $B=\varnothing$

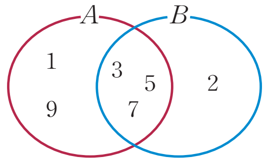
사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

두 집합 A, B에 대하여 A와 $A\cup B$, A와 $A\cap B$ 사이의 포함 관계를 말하여 보자.

이제 합집합과 교집합의 원소의 개수 사이의 관계에 대하여 알아보자.

두 집합 $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$에 대하여



$$n(A)=5,\ n(B)=4,$$
$$n(A\cup B)=6,\ n(A\cap B)=3$$

이다.

이때 $n(A)+n(B)-n(A\cap B)=5+4-3=6$이므로

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

가 성립함을 알 수 있다.

일반적으로 다음이 성립한다.

합집합과 교집합의 원소의 개수 사이의 관계

원소가 유한개인 두 집합 A, B에 대하여

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

특히 두 집합 A, B가 서로소, 즉 $A\cap B=\varnothing$이면 $n(A\cap B)=0$이므로 다음이 성립한다.

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$

보기 두 집합 A, B에 대하여 $n(A)=7$, $n(B)=8$, $n(A\cap B)=4$일 때,

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=7+8-4=11$$

문제 2 두 집합 A, B에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $n(A)=5$, $n(B)=6$, $n(A\cap B)=2$일 때, $n(A\cup B)$

(2) $n(A)=4$, $n(B)=9$, $n(A\cup B)=10$일 때, $n(A\cap B)$

실생활

문제 3 성민이네 반에서는 비빔밥과 스파게티 중 좋아하는 음식은 무엇인가에 대한 설문 조사를 실시하였다. 비빔밥은 20명, 스파게티는 12명이 좋아한다고 답하였고, 비빔밥과 스파게티를 모두 좋아한다고 답한 학생은 5명이라고 한다. 이때 비빔밥 또는 스파게티를 좋아한다고 답한 학생은 몇 명인지 구하여라.

여집합이란 무엇인가?

탐구 활동

과일 바구니에 사과, 배, 귤, 바나나, 오렌지가 들어 있다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 귤과 바나나를 모두 먹었다면 남아 있는 과일은 무엇인가?

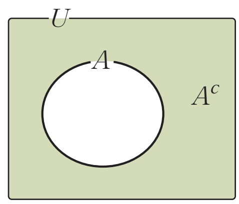
2. 사과, 배, 귤, 바나나를 모두 먹었다면 남아 있는 과일은 무엇인가?

어떤 집합에 대하여 그것의 부분집합을 생각할 때, 처음에 주어진 집합을 **전체집합**이라고 하며, 이것을 기호로

$$\boldsymbol{U}$$

와 같이 나타낸다.

● U는 영어 단어 Universal(전체의)의 첫 글자를, A^C의 C는 영어 단어 Complement(여집합)의 첫 글자를 기호화한 것이다.



집합 A가 전체집합 U의 부분집합일 때, U의 원소 중에서 A에 속하지 않는 모든 원소로 이루어진 집합을 U에 대한 A의 **여집합**이라고 하며, 이것을 기호로

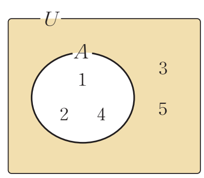
$$\boldsymbol{A^C}$$

과 같이 나타낸다.

전체집합 U에 대한 집합 A의 여집합을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A^C=\{x \mid x \in U \text{ 그리고 } x \notin A\}$$

보기 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대한 집합 $A=\{1, 2, 4\}$의 여집합은 $A^C=\{3, 5\}$이다.



문제 4 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 집합의 여집합을 구하여라.

(1) $A=\{2, 4, 6\}$
(2) $B=\{1\}$
(3) $C=\{1, 2, 3, 4, 5\}$
(4) $D=\{x \mid x\text{는 7보다 작은 자연수}\}$

차집합이란 무엇인가?

탐구 활동

오른쪽 표는 두 상점 A, B에서 파는 물건을 나타낸 것이다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 상점 B에서는 팔지 않고 상점 A에서만 파는 물건은 무엇인가?

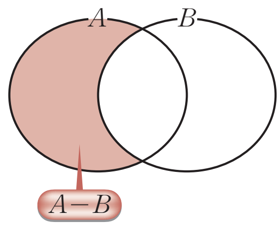
2. 상점 A에서는 팔지 않고 상점 B에서만 파는 물건은 무엇인가?

상점 A	상점 B
운동화	양말
구두	운동화
슬리퍼	공
양말	모자

두 집합 A, B에 대하여 A의 원소 중에서 B에 속하지 않는 모든 원소로 이루어진 집합을 A에 대한 B의 **차집합**이라고 하며, 이것을 기호로

$$A-B$$

와 같이 나타낸다.



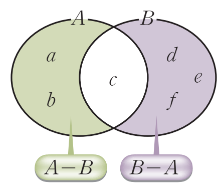
집합 A에 대한 집합 B의 차집합을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$A-B=\{x \mid x \in A \text{ 그리고 } x \notin B\}$$

보기 두 집합 $A=\{a, b, c\}$, $B=\{c, d, e, f\}$에 대하여

$A-B=\{a, b\}$

$B-A=\{d, e, f\}$



문제 5 다음 두 집합 A, B에 대하여 $A-B$와 $B-A$를 구하여라.

(1) $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{3, 5, 7, 9\}$

(2) $A=\{x \mid x$는 6의 약수$\}$, $B=\{x \mid x$는 15의 약수$\}$

문제 6 두 집합 $A=\{2, 3, 4\}$, $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $A-B$　　　　(2) $A-(A\cap B)$

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

두 집합 A, B에 대하여 $A-B=\varnothing$일 때, A와 B 사이의 관계를 설명하여 보자.

집합의 연산에서는 어떤 법칙이 성립하는가?

탐구 활동 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B=\{4, 5, 6, 7\}$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. $A\cup B$와 $B\cup A$를 각각 구하고 비교하여 보자.

2. $A\cap B$와 $B\cap A$를 각각 구하고 비교하여 보자.

일반적으로 두 집합 A, B에 대하여

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A$$

가 성립한다. 이것을 집합의 **교환법칙**이라고 한다.

집합의 교환법칙

(1) $A\cup B=B\cup A$ [합집합에 대한 교환법칙]

(2) $A\cap B=B\cap A$ [교집합에 대한 교환법칙]

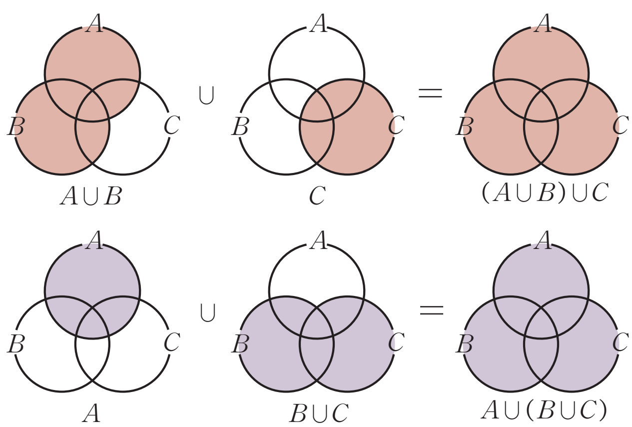
문제 7 두 집합 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{2, 3, 5\}$에 대하여 다음과 같은 교환법칙이 성립함을 보여라.

(1) $A\cup B=B\cup A$ (2) $A\cap B=B\cap A$

예제 01 세 집합 A, B, C에 대하여 다음 등식이 성립함을 벤 다이어그램을 이용하여 보여라.

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

풀이



따라서 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$가 성립한다.

문제 8 세 집합 A, B, C에 대하여 다음 등식이 성립함을 벤 다이어그램을 이용하여 보여라.

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

일반적으로 세 집합 A, B, C에 대하여 다음이 성립한다. 이것을 집합의 **결합법칙**이라고 한다.

- $(A\cup B)\cup C$
  $=A\cup(B\cup C)$
  $=A\cup B\cup C$
- $(A\cap B)\cap C$
  $=A\cap(B\cap C)$
  $=A\cap B\cap C$

집합의 결합법칙

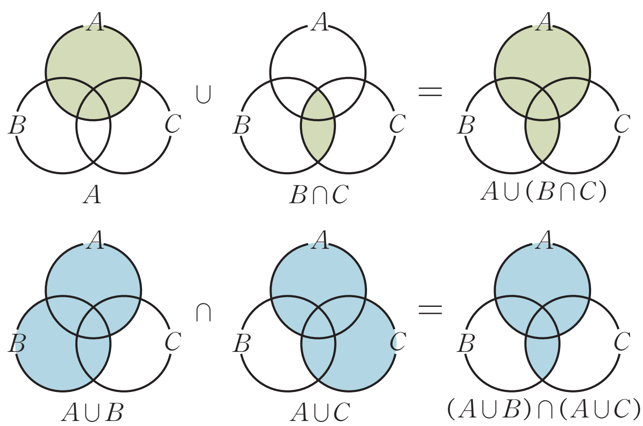
(1) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ [합집합에 대한 결합법칙]

(2) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ [교집합에 대한 결합법칙]

예제 02 세 집합 A, B, C에 대하여 다음 등식이 성립함을 벤 다이어그램을 이용하여 보여라.

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

풀이



따라서 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$가 성립한다.

문제 9 세 집합 A, B, C에 대하여 다음 등식이 성립함을 벤 다이어그램을 이용하여 보여라.

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

일반적으로 세 집합 A, B, C에 대하여 다음이 성립한다. 이것을 집합의 **분배법칙**이라고 한다.

$A\cup(B\cap C)$
$=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
$A\cap(B\cup C)$
$=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

집합의 분배법칙

(1) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
(2) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

문제 10 18의 약수의 집합을 A, 30의 약수의 집합을 B, 10보다 작은 자연수의 집합을 C라고 할 때, 다음이 성립함을 보여라.

(1) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
(2) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

드모르간의 법칙이란 무엇인가?

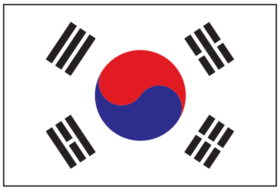
생각 열기

팔괘

팔괘는 고대 우리나라와 중국에서 세상의 이치를 설명하기 위하여 사용했던 것으로, 이어진 선(⚊)과 끊어진 선(⚋)으로 이루어져 있다. 이것은 건(乾 : ☰), 태(兌 : ☱), 이(離 : ☲), 진(震 : ☳), 손(巽 : ☴), 감(坎 : ☵), 간(艮 : ☶), 곤(坤 : ☷)의 8가지 상인데, 이 중에서 태극기에 그려져 있는 '건, 이, 감, 곤'은 각각 '하늘, 불, 물, 땅'을 의미한다.

탐구 활동

팔괘 전체의 집합을 U라 하고, 태극기에 있는 괘의 집합을 A, 끊어진 선(⚋)이 2개 이상인 괘의 집합을 B라고 할 때, 다음을 비교하여 보자.



1. $A-B$와 $A\cap B^C$
2. $(A^C)^C$과 A
3. $(A\cup B)^C$과 $A^C\cap B^C$
4. $(A\cap B)^C$과 $A^C\cup B^C$

전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 두 부분집합

$$A=\{2,\ 4,\ 6\},\ B=\{3,\ 4,\ 6\}$$

에 대하여 $A-B$와 $A\cap B^{C}$을 구하면 다음과 같다.

$$A-B=\{2\}=A\cap B^{C}$$

또 $(A^{C})^{C}$과 A를 구하면 다음과 같다.

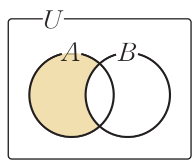
$$(A^{C})^{C}=\{1,\ 3,\ 5\}^{C}=\{2,\ 4,\ 6\}=A$$

예제 03

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 등식이 성립함을 벤 다이어그램을 이용하여 보여라.

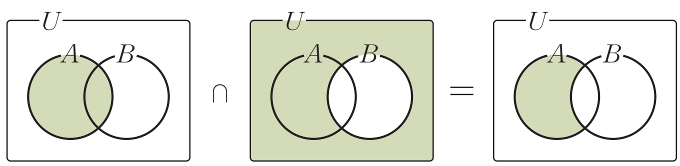
(1) $A-B=A\cap B^{C}$ (2) $(A^{C})^{C}=A$

풀이 (1) $A-B$를 벤 다이어그램으로 나타내면 오른쪽과 같다.



$A-B$

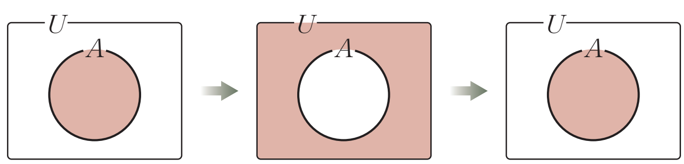
또 $A\cap B^{C}$을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



A B^{C} $A\cap B^{C}$

따라서 $A-B=A\cap B^{C}$이 성립한다.

(2) $(A^{C})^{C}$을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



A A^{C} $(A^{C})^{C}$

따라서 $(A^{C})^{C}=A$가 성립한다.

문제 11

전체집합 U의 부분집합 A에 대하여 다음 등식이 성립함을 벤 다이어그램을 이용하여 보여라.

(1) $A\cup A^{C}=U$ (2) $A\cap A^{C}=\varnothing$

일반적으로 차집합과 여집합에 대하여 다음과 같은 성질이 성립한다.

차집합과 여집합의 성질

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

(1) $A-B=A\cap B^{C}$　　　　(2) $(A^{C})^{C}=A$

(3) $A\cup A^{C}=U$, $A\cap A^{C}=\varnothing$　　　　(4) $U^{C}=\varnothing$, $\varnothing^{C}=U$

전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 두 부분집합

$$A=\{2,\ 4,\ 6\},\ B=\{3,\ 4,\ 6\}$$

에 대하여 $(A\cup B)^{C}$과 $A^{C}\cap B^{C}$, $(A\cap B)^{C}$과 $A^{C}\cup B^{C}$을 구하면 다음과 같다.

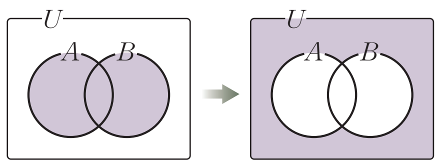
$$(A\cup B)^{C}=\{1,\ 5\}=A^{C}\cap B^{C}$$

$$(A\cap B)^{C}=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}=A^{C}\cup B^{C}$$

예제 04 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 등식이 성립함을 벤 다이어그램을 이용하여 보여라.

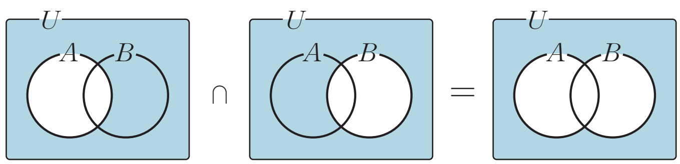
$$\boxed{(A\cup B)^{C}=A^{C}\cap B^{C}}$$

풀이 $(A\cup B)^{C}$을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$A\cup B$　　　$(A\cup B)^{C}$

또 $A^{C}\cap B^{C}$을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



A^{C}　　　B^{C}　　　$A^{C}\cap B^{C}$

따라서 $(A\cup B)^{C}=A^{C}\cap B^{C}$이 성립한다.

문제 12 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 등식이 성립함을 벤 다이어그램을 이용하여 보여라.

$$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$$

드모르간(De Morgan, A. ; 1806~1871): 영국의 수학자로 집합론과 논리학 등의 분야에서 많은 업적을 남겼다.

일반적으로 합집합과 교집합의 여집합에 대하여 다음이 성립한다. 이것을 **드모르간의 법칙**이라고 한다.

드모르간의 법칙

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

(1) $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$ (2) $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

지금까지 알아본 집합의 연산법칙을 이용하여 집합에 관한 여러 가지 등식이 성립함을 보일 수 있다.

예제 05 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 다음 등식이 성립함을 집합의 성질과 연산법칙을 이용하여 보여라.

$$(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$$

풀이 $(A-B)\cup(A-C)=(A\cap B^C)\cup(A\cap C^C)$ (차집합의 성질)

$=A\cap(B^C\cup C^C)$ (분배법칙)

$=A\cap(B\cap C)^C$ (드모르간의 법칙)

$=A-(B\cap C)$ (차집합의 성질)

문제 13 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 다음 등식이 성립함을 집합의 성질과 연산법칙을 이용하여 보여라.

(1) $A\cup(A\cap B)^C=U$

(2) $A-(A-B)=A\cap B$

[해답 p.212]

중단원 기초

수준별 학습

1 다음 중에서 집합인 것을 모두 찾아라.

㉠ 4의 약수의 모임
㉡ 작은 자연수의 모임
㉢ 10보다 큰 짝수의 모임
㉣ 우리 반 학생 중에서 축구를 잘하는 학생의 모임

01 집합의 뜻과 표현
집합의 뜻

2 다음 중에서 집합 $\{3, 6\}$의 진부분집합을 모두 찾아라.

㉠ $\{6\}$	㉡ $\{6, 3\}$
㉢ $\{3, 6, 9\}$	㉣ $\varnothing$

02 집합 사이의 포함 관계
진부분집합

3 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$의 부분집합 중에서 집합 $B=\{1, 2, 3\}$과 서로소인 집합을 모두 구하여라.

03 집합의 연산
서로소

4 두 집합 A, B에 대하여

$$n(A)=5,\ \ n(B)=4,\ \ n(A\cap B)=2$$

일 때, $n(A\cup B)$를 구하여라.

03 집합의 연산
합집합과 교집합의
원소의 개수 사이의 관계

5 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$의 두 부분집합

$$A=\{1, 3, 5\},\ B=\{2, 3, 5\}$$

에 대하여 다음 집합을 구하고, 같은 집합끼리 짝지어라.

(1) $(A\cup B)^C$　　(2) $A^C\cap B^C$
(3) $(A\cap B)^C$　　(4) $A^C\cup B^C$

03 집합의 연산
드모르간의 법칙

[해답 p.212]

중단원 기본

수준별 학습

1 집합 $A=\{x|x$는 4의 약수$\}$, $B=\{x|x$는 8의 약수$\}$일 때, 다음 중에서 옳은 것을 모두 찾아라.

㉠ $2\in A$	㉡ $8\notin B$
㉢ $A\subset B$	㉣ $B\subset A$

01 집합의 뜻과 표현
02 집합 사이의 포함 관계

2 집합 $\{a, b, c\}$의 진부분집합 중에서 a를 원소로 가지는 집합을 모두 구하여라.

02 집합 사이의 포함 관계
진부분집합

3 우리 반에서 가수 H의 공연을 본 적이 있는 학생은 7명, 가수 S의 공연을 본 적이 있는 학생은 10명이다. 가수 H 또는 가수 S의 공연을 본 적이 있는 학생이 12명일 때, 가수 H와 가수 S의 공연을 모두 본 적이 있는 학생은 몇 명인지 구하여라.

03 집합의 연산
합집합과 교집합의 원소의 개수 사이의 관계

4 집합 $A=\{1, 2, 4, 5\}$에 대하여 다음을 만족시키는 집합 B를 구하여라.

$$(A\cup B)-(A\cap B)=\{1, 3, 4\}$$

03 집합의 연산

5 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음을 간단히 나타내어라.

(1) $A\cap(A\cup B)^C$ (2) $A\cup(A\cup B)^C$
(3) $(A\cup B)\cap(A^C\cap B^C)$ (4) $(A\cap B)\cup(A^C\cup B^C)$

03 집합의 연산
집합의 연산법칙

[해답 p.212]

중단원 실력

수준별 학습

1 집합 $A=\{1,\ 3,\ 5\}$에 대하여

$$X=\{x\,|\,x=a\times b,\ a\in A,\ b\in A\}$$
$$Y=\{y\,|\,y=a\div b,\ a\in A,\ b\in A\}$$

일 때, $n(X)$와 $n(Y)$를 구하여라.

01 집합의 뜻과 표현

2 두 집합 $A=\{1,\ 3\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$에 대하여 $A\subset X$, $X\subset B$를 만족시키는 집합 X는 모두 몇 개인지 구하여라.

02 집합 사이의 포함 관계
부분집합

3 두 집합 $A=\{a,\ b,\ 5\}$, $B=\{a+1,\ 4,\ 6\}$에 대하여 $A=B$일 때, 두 상수 a, b의 값을 구하여라.

02 집합 사이의 포함 관계

4 오른쪽 표는 혜진이네 반 학생 30명을 대상으로 놀이 공원에서 바이킹과 범퍼카를 탄 학생 수를 조사하여 나타낸 것이다. 바이킹과 범퍼카 중에서 어느 것도 타지 않은 학생이 3명일 때, 바이킹만 탄 학생은 몇 명인지 구하여라.

놀이 기구	학생 수
바이킹	22명
범퍼카	16명

03 집합의 연산

5 전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 다음 등식이 성립함을 집합의 성질과 연산법칙을 이용하여 보여라.

$$(A\cup B)\cap\{C\cup(A^c\cap B^c)\}=(A\cup B)\cap C$$

03 집합의 연산
집합의 연산법칙

2 명제

소크라테스와 추론

고대 그리스의 철학자 소크라테스(Socrates ; ?B.C. 470～B.C. 399)는 현명하다고 이름난 여러 사람들을 찾아가 자문을 구하였다. 그런데 막상 그들과 토론하여 보니 소문과는 다르게 현명하지 않다는 결론을 내렸고, 그들의 무지를 밝히는 토론과 추론을 계속하였다. 결국 소크라테스는 많은 적을 만들게 되었고 재판에서 젊은이들에게 나쁜 영향을 끼쳤다는 죄로 사형 선고를 받았다. 그는 재판이 끝난 후 살 수 있는 기회가 있었지만 여러 가지 사실로부터 죽는 것이 옳다는 결론을 내리고 죽음을 맞이하였다.

소크라테스의 죽음(The Death of Socrates): 프랑스의 화가 다비드(David, J. L. ; 1748～1825)의 작품으로 소크라테스가 독배를 마시기 직전의 모습이다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 53쪽

여러 가지 사실로부터 옳은 결론을 어떻게 도출할 수 있을까?

01 명제와 증명

● 명제의 뜻을 안다.

명제란 무엇인가?

생각 열기 오늘 날씨는 따뜻하다?

탐구 활동 다음 문장을 보고, 물음에 답하여 보자.

ㄱ. 독도는 대한민국의 영토이다.	ㄴ. 코끼리는 용감하다.
ㄷ. 4는 8의 약수이다.	ㄹ. 태양은 지구보다 작다.

1. 참인 문장은 어느 것인가?
2. 거짓인 문장은 어느 것인가?
3. 참인지 거짓인지를 판별할 수 없는 문장은 어느 것인가?

우리가 사용하는 문장이나 식 중에는 그 내용이 참인지 거짓인지를 판별할 수 있는 것과 판별할 수 없는 것이 있다.

이때 그 내용이 참인지 거짓인지를 명확히 판별할 수 있는 문장이나 식을 **명제**라고 한다.

예제 01 다음 중에서 명제인 것을 모두 찾고, 그것이 참인지 거짓인지를 말하여라.

참, 거짓을 분명하게 판별할 수 있는 것을 찾는다.

(1) $2x-3<1$

(2) 7은 2의 배수이다.

(3) 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 $180°$이다.

풀이 (1) $x=1$이면 참이 되고 $x=3$이면 거짓이 되어 '$2x-3<1$'은 참인지 거짓인지를 판별할 수 없으므로 명제가 아니다.

(2) 7은 2의 배수가 아니므로 거짓인 명제이다.

(3) 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 $180°$이므로 참인 명제이다.

답 (1) 명제가 아니다. (2) 거짓인 명제 (3) 참인 명제

문제 1 다음 중에서 명제인 것을 모두 찾고, 그것이 참인지 거짓인지를 말하여라.

(1) 설악산은 높다.

(2) $a=b$이면 $a+3=b+3$이다.

(3) 넓이가 같은 두 삼각형은 서로 합동이다.

명제 '$x=2$이면 $3x-1=5$이다.'에서 '$x=2$'를 p라 하고, '$3x-1=5$'를 q라고 하면 이 명제는

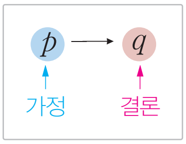
'p이면 q이다.'

의 꼴로 나타내어진다.

이때 명제 'p이면 q이다.'에서 p를 **가정**, q를 **결론**이라고 하며, 이것을 기호로

$$p \longrightarrow q$$

와 같이 나타낸다.



보기 (1) 명제 '$x=-3$이면 $|x|=3$이다.'에서 '$x=-3$'은 가정이고, '$|x|=3$'은 결론이다.

(2) 명제 '맞꼭지각의 크기는 서로 같다.'를 $p \longrightarrow q$의 꼴로 바꾸면

'두 각이 맞꼭지각이면 두 각의 크기는 서로 같다.'

이므로 '두 각은 맞꼭지각이다.'는 가정이고, '두 각의 크기는 서로 같다.'는 결론이다.

문제 2 다음 명제의 가정과 결론을 말하여라.

(1) $x^2 \le 4$이면 $-2 \le x \le 2$이다.

(2) 두 수 a, b가 자연수이면 $a+b$는 자연수이다.

문제 3 다음 명제의 가정과 결론을 말하여라.

'p이면 q이다.'의 꼴로 바꾼 뒤에 가정과 결론을 찾는다.

(1) 정삼각형 ABC의 세 내각의 크기는 같다.

(2) 함수 $f(x)=(x-3)^2+2$의 최솟값은 2이다.

용어의 정의, 정리, 증명이란 무엇인가?

탐구 활동

다음 그림을 보고, 물음에 답하여 보자.

1. 세 학생이 '눈'을 다르게 생각한 이유를 말하여 보자.

2. '눈'과 같이 하나의 단어를 사람마다 다르게 생각할 수 있는 경우를 말하여 보자.

일상생활에서 사용하고 있는 용어의 뜻을 사람마다 다르게 말하면 혼란이 일어날 수도 있으므로 이에 대한 분명한 약속이 필요하다.

마찬가지로 수학에서 사용하는 용어도 그 뜻을 명확하게 밝혀야 의미를 제대로 전달할 수 있다.

이등변삼각형의 뜻은

'두 변의 길이가 같은 삼각형'

'두 내각의 크기가 같은 삼각형'

과 같이 서로 다르게 말할 수 있지만 한 용어의 뜻을 여러 가지로 정하면 혼란이 생길 수 있으므로 '두 변의 길이가 같은 삼각형'으로 정한다.

정의는 용어의 뜻에 대한 약속이다.

이와 같이 용어의 뜻을 명확하게 정한 문장을 그 용어의 **정의**라고 한다.

보기 정삼각형과 직사각형의 정의는 각각 다음과 같다.

(1) 정삼각형: 세 변의 길이가 모두 같은 삼각형

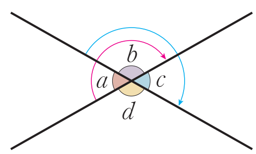
(2) 직사각형: 네 내각의 크기가 모두 같은 사각형

문제 4 다음 용어의 정의를 말하여라.

(1) 합동　　(2) 작도

(3) 직각삼각형　　(4) 정사각형

명제 '맞꼭지각의 크기는 서로 같다.'가 참임을 설명하여 보자.



오른쪽 그림에서

$$\angle a + \angle b = 180^\circ,\ \angle b + \angle c = 180^\circ$$

이므로 $\angle a + \angle b = \angle b + \angle c$에서

$$\angle a = \angle c$$

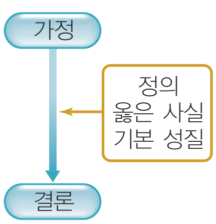
이다. 마찬가지 방법으로

$$\angle b = \angle d$$

임을 알 수 있다.

따라서 명제 '맞꼭지각의 크기는 서로 같다.'는 참이다.

증명



이와 같이 실험이나 경험을 따르지 않고 정의나 이미 알고 있는 옳은 사실, 밝혀진 성질 등을 이용하여 명제의 가정으로부터 결론을 체계적으로 이끌어 내어 명제가 참임을 설명하는 것을 **증명**이라고 한다.

또한 참임이 증명된 명제 중에서 기본이 되는 것이나 여러 가지 성질을 증명할 때 자주 이용되는 것을 **정리**라고 한다.

예를 들어 다음은 모두 정리이다.

'평행한 두 직선이 다른 한 직선과 만날 때, 동위각과 엇각의 크기는 각각 서로 같다.'

'삼각형에서 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다.'

예제 02

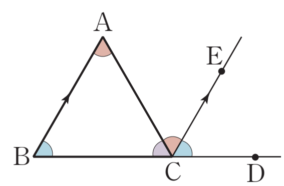
삼각형 ABC의 세 내각의 크기의 합은 $180°$임을 증명하여라.

명제가 참임을 증명할 때에는 다음과 같은 순서를 따르면 편리하다.
❶ 무엇을 증명해야 하는지를 파악하고, 주어진 명제를 가정과 결론으로 나눈다.
❷ 가정에 알맞은 그림을 그리고 기호를 붙인다.
❸ 정의, 이미 알고 있는 옳은 사실, 밝혀진 성질 등을 이용하여 가정에서 결론을 이끌어 낸다.

가정 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$는 삼각형 ABC의 세 내각이다.

결론 $\angle A+\angle B+\angle C=180°$

증명 삼각형 ABC에서 변 BC의 연장선 위에 점 D를 잡고, 꼭짓점 C에서 변 AB에 평행하도록 반직선 CE를 그으면



$$\angle A=\angle ACE\,(\text{엇각})$$
$$\angle B=\angle ECD\,(\text{동위각})$$

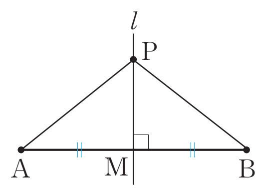
이므로

$\angle A+\angle B+\angle C=\angle ACE+\angle ECD+\angle ACB=180°\,(\text{평각})$

따라서 삼각형 ABC의 세 내각의 크기의 합은 $180°$이다.

문제 5

다음은 선분 AB의 수직이등분선 l과 선분 AB의 교점을 M이라고 할 때, 직선 l 위의 점 M이 아닌 한 점 P에 대하여 $\overline{PA}=\overline{PB}$임을 증명하는 과정이다. $\boxed{}$ 안에 알맞은 것을 써넣어라.



[가정] 직선 l은 선분 AB의 수직이등분선이고, 점 M은 선분 AB와 직선 l의 교점이다.
$\overline{AM}=\overline{BM}$, $\angle AMP=\angle BMP=\boxed{}$

[결론] $\overline{PA}=\overline{PB}$

[증명] 삼각형 PAM과 삼각형 PBM에서

$\overline{AM}=\overline{BM}$ (가정) ……①

$\angle AMP=\angle BMP=\boxed{}$ (가정) ……②

$\boxed{}$은 공통 ……③

①, ②, ③에서 대응하는 두 변의 길이가 각각 같고, 그 끼인각의 크기가 같으므로

$\triangle PAM\equiv\boxed{}$

따라서 $\overline{PA}=\overline{PB}$이다.

02 조건과 진리집합

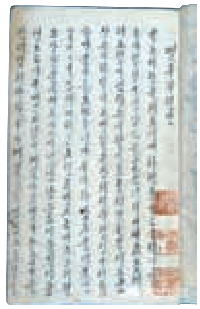
● 조건의 뜻을 알고, ‘모든’, ‘어떤’을 포함한 명제를 이해한다.

명제와 조건의 부정을 어떻게 하는가?

생각 열기

별주부전

토끼전이라고도 하는 별주부전은 동물을 의인화한 우화 소설로 조선 후기에 판소리로 불렸다. 현재 약 55종의 서로 다른 판본이 전해지고 있기 때문에 어떤 판본이냐에 따라 별주부전, 토끼전, 토별가, 수궁가, 퇴별전, 퇴별가, 토의 간 등 다양하게 불린다.



탐구 활동

다음 그림을 보고, 물음에 답하여 보자.

1. ①, ② 중에서 명제인 것은 어느 것인가?

2. ③의 대답으로 ‘x는 바다 동물이다.’가 참이 되도록 x에 알맞은 동물을 말하여 보자.

3. ④는 참인 명제이다. 이 명제를 거짓인 명제로 만들려면 어떻게 해야 하는지 말하여 보자.

탐구 활동에서 ‘문어는 바다 동물이다.’는 참인 명제이고, ‘x는 바다 동물이다.’는 명제가 아니다.

그런데 ‘x는 바다 동물이다.’에서 x가 ‘고등어’이면 ‘고등어는 바다 동물이다.’는 참인 명제가 되고, x가 ‘사슴’이면 ‘사슴은 바다 동물이다.’는 거짓인 명제가 된다.

이와 같이 변수 x를 포함하는 문장이나 식이 x의 값에 따라 참, 거짓이 결정될 때, 이 문장이나 식을 **조건**이라고 한다.

● 일반적으로 조건은 명제가 아니다.

보기 (1) ‘2는 짝수이다.’는 참, 거짓을 판별할 수 있으므로 명제이다.

(2) ‘x는 짝수이다.’는 x의 값에 따라 참이나 거짓이 결정되므로 조건이다.

문제 1 다음에 주어진 문장이나 식을 명제와 조건으로 구별하여라.

(1) $x^2-2x+1=0$

(2) 직사각형은 정사각형이다.

(3) $|x|<1$이면 $-1<x<1$이다.

(4) x는 실수가 아니다.

어떤 명제 또는 조건 p에 대하여 'p가 아니다.'를 p의 **부정**이라고 하며, 이것을 기호로

$$\sim p$$

와 같이 나타낸다.

$\sim p$를 'p가 아니다.' 또는 'not p' 라고 읽는다.

일반적으로 명제 p가 참이면 $\sim p$는 거짓이고, 명제 p가 거짓이면 $\sim p$는 참이다.

또 $\sim p$의 부정은 p이다. 즉, $\sim(\sim p)=p$이다.

보기 (1) 명제 '3은 소수이다.' 의 부정은 '3은 소수가 아니다.' 이다.

(2) 조건 '$x=1$' 의 부정은 '$x\neq1$' 이다.

문제 2 다음 명제의 부정을 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) 2는 4의 배수이다.

(2) $2+3>4$

(3) $\sqrt{3}$은 무리수이다.

(4) $1^2+2^2=3^2$

문제 3 다음 조건의 부정을 말하여라.

(1) $x=2$

(2) x는 2의 배수이다.

(3) $x\leq3$

(4) x는 5의 약수가 아니다.

사고력 기르기

추론

▶ 의사소통

문제 해결

조건 'x는 짝수이다.' 의 부정으로 'x는 홀수이다.' 가 옳은지 토의하여 보자.

진리집합이란 무엇인가?

생각 열기

동물의 분류

지구 상에 서식하고 있는 동물은 여러 종류로 분류된다. 호랑이와 같은 포유류의 가장 큰 특징은 젖샘이 있어서 새끼에게 수유를 한다는 것이다. 곤충은 몸이 머리, 가슴, 배의 세 부분으로 명확히 구별되며, 지구 상의 동물 중에서 70 %를 차지하고 있다. 조류는 날개가 있고 다리가 둘인 척추동물로, 가장 작은 것은 벌새이며 가장 큰 것은 타조이다.

탐구 활동

전체집합 $U=\{$ 호랑이, 침팬지, 벌새, 무당벌레, 사슴, 귀뚜라미, 메뚜기, 타조 $\}$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 조건 'x는 포유류이다.'가 참이 되도록 하는 원소로 이루어진 집합을 구하여 보자.
2. 조건 'x는 조류이다.'가 참이 되도록 하는 원소로 이루어진 집합을 구하여 보자.
3. 조건 'x는 조류이다.'의 부정이 참이 되도록 하는 원소로 이루어진 집합을 구하여 보자.

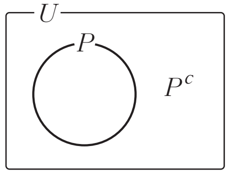
특별한 언급이 없으면 전체집합은 실수 전체의 집합이다.

전체집합 U의 원소 중에서 조건 p가 참이 되도록 하는 모든 원소로 이루어진 집합을 조건 p의 **진리집합**이라고 한다.

즉, 조건 p의 진리집합을 P라고 하면

$$P=\{x\,|\,x\in U \text{이고 } x\text{는 조건 } p\text{를 참이 되도록 하는 원소}\}$$

이다. 이때 조건 p의 부정 $\sim p$의 진리집합은 P^C이다.



예제 01

전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 조건 p를

$$p: x+1<4$$

라고 할 때, p의 진리집합과 $\sim p$의 진리집합을 구하여라.

풀이 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이고, 조건 p는

$$p: x+1<4$$

이므로 p의 진리집합은 $\{1, 2\}$이다.

조건 p의 부정 $\sim p$는

$$\sim p: x+1\geq 4$$

이므로 $\sim p$의 진리집합은 $\{3, 4, 5\}$이다.

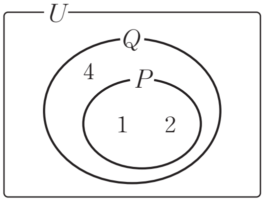
답 p의 진리집합: $\{1, 2\}$, $\sim p$의 진리집합: $\{3, 4, 5\}$

문제 4 전체집합 $U=\{0, 1, 2, 3, 4\}$에 대하여 다음 조건 p, q의 진리집합과 $\sim p$, $\sim q$의 진리집합을 각각 구하여라.

(1) p : x는 소수이다. (2) q : $x(x-1)=0$

진리집합의 포함 관계를 이용하여 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있다.

명제 'x가 2의 약수이면 x는 4의 약수이다.'는 참이다.



이때 조건

p : x는 2의 약수이다.

q : x는 4의 약수이다.

의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면 $P \subset Q$이다.

조건 p와 q에 대하여 '$p \longrightarrow q$'는 명제가 된다.

일반적으로 명제 $p \longrightarrow q$에 대하여 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때, 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 $P \subset Q$가 성립한다.

또 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓이면 $P \not\subset Q$가 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

명제 $p \longrightarrow q$의 참, 거짓과 진리집합 사이의 관계

명제 $p \longrightarrow q$에 대하여 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때

(1) 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 $P \subset Q$이다.
또 $P \subset Q$이면 $p \longrightarrow q$는 참이다.

(2) 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓이면 $P \not\subset Q$이다.
또 $P \not\subset Q$이면 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

예제 02 다음 명제의 참, 거짓을 진리집합을 이용하여 판별하여라.

(1) $x-2=0$이면 $x^2-4=0$이다. (2) $x+2>1$이면 $x>2$이다.

풀이 주어진 명제의 가정을 p, 결론을 q라 하고, 각각의 진리집합을 P, Q라고 하자.

(1) $P=\{2\}$, $Q=\{-2, 2\}$이므로 $P \subset Q$이다.
따라서 주어진 명제는 참이다.

(2) $P=\{x \mid x>-1\}$, $Q=\{x \mid x>2\}$이므로 $P \not\subset Q$이다.
따라서 주어진 명제는 거짓이다.

답 (1) 참 (2) 거짓

문제 5 다음 명제의 참, 거짓을 진리집합을 이용하여 판별하여라.

(1) 4의 배수는 8의 배수이다.

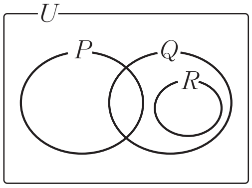
(2) $3x-4>0$이면 $x>0$이다.

(3) $x^2>1$이면 $x>1$이다.

(4) $x^2+x-6=0$이면 $x=2$이다.

발전

문제 6 전체집합 U에 대하여 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라고 할 때, 이들 집합 사이의 포함 관계가 오른쪽 그림과 같다고 한다. 조건 p, q, r를 이용하여 다음과 같은 명제를 만들었을 때, 이들의 참, 거짓을 진리집합을 이용하여 판별하여라.



(1) $r \longrightarrow q$

(2) $p \longrightarrow \sim r$

(3) $\sim q \longrightarrow \sim r$

(4) $r \longrightarrow \sim p$

창의 up

다음 두 조건 p, q와 그 부정을 이용하여 명제를 3개 이상 만들고, 그것의 참, 거짓을 판별하여라.

p : x는 홀수이다.	q : x는 소수이다.

'모든'과 '어떤'을 포함하는 명제의 참, 거짓은 어떠한가?

탐구 활동 **전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.**

1. 조건 p : 'x는 5보다 작다.' 의 진리집합 P를 구하여 보자.
2. 조건 q : 'x는 짝수이다.' 의 진리집합 Q를 구하여 보자.
3. 조건 r : 'x는 5보다 크다.' 의 진리집합 R를 구하여 보자.
4. 세 집합 P, Q, R 중에서 U인 것과 $\varnothing$인 것을 말하여 보자.

일반적으로 조건 p는 명제가 아닐 수 있지만 전체집합 U에 대하여 조건 p 앞에 '모든' 이나 '어떤' 이 있으면 참, 거짓이 구별되므로 명제가 된다.

전체집합 U에 대하여 조건 p의 진리집합을 P라고 할 때, 명제

'모든 x에 대하여 p이다.'

가 참인 경우는 U에 속하는 모든 원소 x에 대하여 p가 참인 것을 뜻한다. 즉, $P=U$이다.

또 명제

'어떤 x에 대하여 p이다.'

가 참인 경우는 U에 속하는 원소 중에서 p가 참이 되도록 하는 x가 존재한다는 뜻이다. 즉, $P\neq\varnothing$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

'모든' 과 '어떤' 을 포함하는 명제의 참, 거짓

전체집합 U에서의 조건 p의 진리집합을 P라고 할 때

(1) $P=U$이면 명제 '모든 x에 대하여 p이다.' 는 참이다.

(2) $P\neq U$이면 명제 '모든 x에 대하여 p이다.' 는 거짓이다.

(3) $P\neq\varnothing$이면 명제 '어떤 x에 대하여 p이다.' 는 참이다.

(4) $P=\varnothing$이면 명제 '어떤 x에 대하여 p이다.' 는 거짓이다.

예제 03

전체집합 $U=\{-1, 0, 1\}$에 대하여 다음 명제의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) 모든 x에 대하여 $x>0$이다.

(2) 어떤 x에 대하여 $x=|x|$이다.

풀이 (1) 조건 p: $x>0$의 진리집합을 P라고 하면 $P=\{1\}\neq U$이므로 명제 '모든 x에 대하여 $x>0$이다.' 는 거짓이다.

(2) 조건 p: $x=|x|$의 진리집합을 P라고 하면 $P=\{0, 1\}\neq\varnothing$이므로 명제 '어떤 x에 대하여 $x=|x|$이다.' 는 참이다.

답 (1) 거짓 (2) 참

문제 7

전체집합 $U=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$에 대하여 다음 명제의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) 모든 x에 대하여 $|x|\leq 2$이다.

(2) 어떤 x에 대하여 $(x-2)(x+2)>0$이다.

이제 '모든' 과 '어떤' 을 포함하는 명제의 부정에 대하여 알아보자.

명제 '모든 x에 대하여 p이다.' 의 부정은 'p가 아닌 x가 있다.' 이므로

'어떤 x에 대하여 $\sim p$이다.'

가 된다. 또한 '어떤 x에 대하여 p이다.' 의 부정은 'p인 x가 없다.' 이므로

'모든 x에 대하여 $\sim p$이다.'

가 된다.

일반적으로 '모든'과 '어떤'을 포함하는 명제의 부정은 다음과 같다.

'모든' 과 '어떤' 을 포함하는 명제의 부정

(1) 명제 '모든 x에 대하여 p이다.' 의 부정은 '어떤 x에 대하여 $\sim p$이다.' 이다.
(2) 명제 '어떤 x에 대하여 p이다.' 의 부정은 '모든 x에 대하여 $\sim p$이다.' 이다.

예제 04 다음 명제의 부정을 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) 모든 자연수 x에 대하여 $x+4\geq 7$이다.

(2) 어떤 자연수 x에 대하여 $2x=4$이다.

풀이 (1) 주어진 명제의 부정은 '어떤 자연수 x에 대하여 $x+4<7$이다.'이고, $x=1$, 2인 경우 $x+4<7$이므로 이 명제는 참이다.

(2) 주어진 명제의 부정은 '모든 자연수 x에 대하여 $2x\neq 4$이다.'이고, $x=2$인 경우 $2x=4$이므로 이 명제는 거짓이다.

답 (1) 어떤 자연수 x에 대하여 $x+4<7$이다. (참)
(2) 모든 자연수 x에 대하여 $2x\neq 4$이다. (거짓)

문제 8 다음 명제의 부정을 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) 모든 자연수 x에 대하여 $x>2$이다.

(2) 어떤 자연수 x에 대하여 $x\neq 1$이다.

문제 9 다음 명제의 부정을 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) 모든 이등변삼각형은 정삼각형이다.

(2) 모든 8의 배수는 2의 배수이다.

(3) 어떤 평행사변형은 정사각형이다.

(4) 어떤 각은 직각이다.

03 명제의 역과 대우

- 명제의 역과 대우를 이해한다.
- 대우를 이용한 증명법과 귀류법을 이해한다.

명제의 역과 대우란 무엇인가?

탐구 활동

두 조건

$$p: x\text{는 } 4\text{의 배수이다.} \quad q: x\text{는 } 2\text{의 배수이다.}$$

에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 두 조건 p, q를 이용하여 다음 각 명제를 말하여 보자.

(1) $p \longrightarrow q$　　(2) $q \longrightarrow p$　　(3) $\sim q \longrightarrow \sim p$

2. **1**에서 구한 명제의 참, 거짓을 판별하여 보자.

탐구 활동의 두 조건 p, q에 대하여 명제

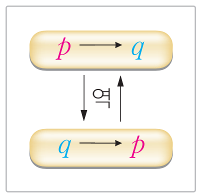
$$p \longrightarrow q: x\text{가 } 4\text{의 배수이면 } x\text{는 } 2\text{의 배수이다.}$$

에서 가정 p와 결론 q를 서로 바꾸면 새로운 명제

$$q \longrightarrow p: x\text{가 } 2\text{의 배수이면 } x\text{는 } 4\text{의 배수이다.}$$

를 얻는다.

이와 같이 명제의 가정과 결론을 서로 바꾸어 놓은 명제를 그 명제의 **역**이라고 한다.



즉, 명제 $p \longrightarrow q$의 역은 명제 $q \longrightarrow p$이다.

이때 명제 $p \longrightarrow q$: 'x가 4의 배수이면 x는 2의 배수이다.'는 참이지만 명제 $q \longrightarrow p$: 'x가 2의 배수이면 x는 4의 배수이다.'는 거짓이다.

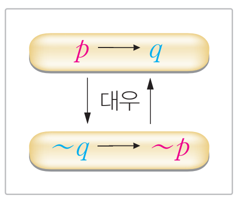
6은 2의 배수이지만 4의 배수는 아니다.

이와 같이 주어진 명제가 참이라고 해서 그 명제의 역이 항상 참이 되는 것은 아니다.

한편 탐구 활동의 두 조건 p, q의 부정 $\sim p$, $\sim q$를 이용하여 다음과 같은 명제를 만들 수 있다.

$$\sim q \longrightarrow \sim p: x\text{가 } 2\text{의 배수가 아니면 } x\text{는 } 4\text{의 배수가 아니다.}$$

이와 같이 명제의 가정과 결론을 각각 부정하고 서로 바꾸어 놓은 명제를 그 명제의 **대우**라고 한다.



즉, 명제 $p \longrightarrow q$의 대우는 명제 $\sim q \longrightarrow \sim p$이다.

예제 01 다음 명제의 역과 대우를 말하고, 그 각각의 참, 거짓을 판별하여라.

$x=1$이면 $x^2=1$이다.

어떤 명제가 거짓임을 보일 때, 그 명제가 성립하지 않는 예를 하나 들어도 된다. 이러한 예를 반례라고 한다.

풀이 역: $x^2=1$이면 $x=1$이다.

[반례] $x=-1$일 때 $x^2=1$이지만 $x\neq1$이므로 거짓이다.

대우: $x^2\neq1$이면 $x\neq1$이다.

$x^2\neq1$이면 $x\neq1$이고 $x\neq-1$이므로 참이다.

답 역: $x^2=1$이면 $x=1$이다. (거짓)
대우: $x^2\neq1$이면 $x\neq1$이다. (참)

문제 1 다음 명제의 역과 대우를 말하고, 그 각각의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) 10의 약수는 5의 약수이다.

(2) $(x-2)(x+2)>0$이면 $x>2$이다.

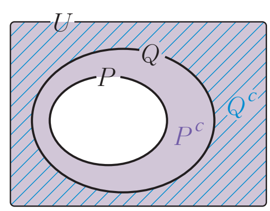
(3) 정삼각형은 이등변삼각형이다.

발전

문제 2 명제 'a와 b가 무리수이면 $a+b$도 무리수이다.'의 역과 대우를 말하고, 그 각각의 참, 거짓을 판별하여라.

또는 $\xrightarrow{\text{부정}}$ 그리고
그리고 $\xrightarrow{\text{부정}}$ 또는

명제와 그 대우 사이에는 어떤 관계가 있는가?



전체집합 U에 대하여 어떤 명제 $p \longrightarrow q$가 참일 때, 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면 $P\subset Q$이므로 $Q^C\subset P^C$이다.

그런데 $\sim p$, $\sim q$의 진리집합이 각각 P^C, Q^C이므로 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$는 참이다.

역으로 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참이면 $Q^C\subset P^C$에서 $P\subset Q$이므로 $p \longrightarrow q$는 참이다.

그러므로 어떤 명제가 참이면 그 대우는 항상 참이다. 또 어떤 명제의 대우가 참이면 그 명제도 참이다.

명제를 직접 증명하기 어려울 때, 대우를 이용하여 증명하면 편리한 경우가 있다.

따라서 명제 $p \longrightarrow q$가 참임을 증명하기 위하여 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$가 참임을 증명해도 된다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

명제와 그 대우 사이의 관계

명제 $p \longrightarrow q$의 참, 거짓과 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$의 참, 거짓은 일치한다.

예제 02

다음 명제가 참임을 증명하여라.

자연수 n에 대하여 n^2이 짝수이면 n도 짝수이다.

자연수 범위에서 조건 'x는 짝수이다.'의 부정은 'x는 홀수이다.'이다.

증명 주어진 명제의 대우는

'자연수 n에 대하여 n이 홀수이면 n^2도 홀수이다.'

자연수 n이 홀수이면

$$n=2k-1 \ (k\text{는 자연수})$$

로 나타낼 수 있으므로

$$n^2=(2k-1)^2=4k^2-4k+1=2(2k^2-2k+1)-1$$

이때 $2k^2-2k+1=k^2+(k-1)^2$은 자연수이므로 n^2은 홀수이다.

따라서 자연수 n에 대하여 n^2이 짝수이면 n도 짝수이다.

문제 3

다음 명제가 참임을 증명하여라.

(1) 자연수 n에 대하여 n^2이 3의 배수이면 n도 3의 배수이다.

(2) 자연수 a, b에 대하여 ab가 짝수이면 a 또는 b가 짝수이다.

사고력 기르기

추론

▶ 의사소통

문제 해결

'미인은 잠꾸러기이다.'와 같은 속설이나 '보기 좋은 떡이 먹기도 좋다.'와 같은 속담을 찾아보고, 명제처럼 생각하여 그것의 역과 대우를 말하여 보자.

귀류법이란 무엇인가?

생각 열기

모순(矛盾)

모순은 어떤 사실의 앞뒤 또는 두 사실이 이치상 어긋나서 서로 맞지 않음을 이르는 말이다. 한자를 그대로 풀면 '창과 방패'로, 중국 초나라의 상인이 창과 방패를 팔면서 앞뒤가 맞지 않은 말을 하였다는 데서 유래하였다.

탐구 활동

다음 물음에 답하여 보자.

1. 다음은 명제의 결론을 부정하면 모순이 됨을 보여 명제 '자연수 a가 2가 아닌 소수이면 $a+1$은 짝수이다.'를 증명하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣어 보자.

> $a+1$이 홀수라고 하면 a는 □이므로 2는 a의 □이다. 이것은 a가 □라는 가정에 모순이다. 따라서 $a+1$은 □이다.

명제의 결론을 부정하면 모순이 일어남을 보여 명제가 참임을 증명하는 방법이 있다.

명제 '$\sqrt{2}$는 유리수가 아니다.'가 참임을 증명하여 보자.

$\sqrt{2}$가 유리수라고 하면

$$\sqrt{2}=\frac{a}{b}\ (a,\ b\text{는 서로소인 자연수},\ b\neq 0)$$

로 놓을 수 있다. 이 식의 양변을 제곱하면 $2=\dfrac{a^2}{b^2}$, 즉

$$a^2=2b^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

이고, a^2이 2의 배수이므로 51쪽의 예제 2에 의하여 a도 2의 배수이다.

a가 2의 배수이므로

$$a=2k \ (k\text{는 자연수})$$

로 놓고 ①에 대입하면

$$(2k)^2=2b^2, \quad 2k^2=b^2$$

이다. 마찬가지로 b^2이 2의 배수이므로 b도 2의 배수이다.

이때 두 정수 a, b가 모두 2의 배수가 되어 a, b가 서로소라는 가정에 모순이다.

따라서 명제 '$\sqrt{2}$는 유리수가 아니다.'는 참이다.

이와 같이 주어진 명제의 결론을 부정하면 가정 또는 이미 알려진 수학적 사실에 모순이 일어남을 보여 원래의 명제가 참임을 증명하는 방법을 **귀류법**이라고 한다.

대우를 이용한 증명은 귀류법의 한 종류이다.

예제 03

명제 '가장 큰 자연수는 존재하지 않는다.'가 참임을 귀류법으로 증명하여라.

증명 가장 큰 자연수가 존재한다고 하고, 이 자연수를 m이라고 하자.

모든 자연수 n에 대하여 $n<n+1$이므로

$$m<m+1$$

이때 $m+1$은 자연수이므로 m이 가장 큰 자연수라는 가정에 모순이다.

따라서 명제 '가장 큰 자연수는 존재하지 않는다.'는 참이다.

문제 4 명제 '자연수 a, b에 대하여 ab가 홀수이면 a, b는 모두 홀수이다.'가 참임을 귀류법으로 증명하여라.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

어떤 사건에 대하여 네 명의 용의자 A, B, C, D를 조사한 결과 다음과 같은 사실을 알아내었다. 진짜 범인을 모두 찾아라.

ㄱ. B가 범인이 아니거나 D가 범인이 아니면 A는 범인이다.
ㄴ. A가 범인이면 B도 범인이다.
ㄷ. C가 범인이면 B는 범인이 아니다.
ㄹ. A가 범인이 아니거나 C가 범인이 아니면 D도 범인이 아니다.

04 필요조건과 충분조건

● 필요조건과 충분조건을 이해한다.

필요조건과 충분조건이란 무엇인가?

탐구 활동 우리 반 학생 중에서 다음 ⟨1⟩, ⟨2⟩, ⟨3⟩을 만족시키는 학생의 집합을 각각 생각하고, 물음에 답하여 보자.

> ⟨1⟩ 안경을 쓴다.
> ⟨2⟩ 5월에 태어났다.
> ⟨3⟩ 형제가 있다.

1. 다음 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라고 할 때, P, Q, R를 구하여 보자.

> p : ⟨1⟩을 만족시키는 학생
> q : ⟨1⟩과 ⟨2⟩를 만족시키는 학생
> r : ⟨1⟩, ⟨2⟩, ⟨3⟩을 모두 만족시키는 학생

2. 세 조건 p, q, r의 각 진리집합 P, Q, R에 대하여 이들 사이의 포함 관계를 말하여 보자.

3. 조건 r가 참인 명제가 되기 위해서는 조건 p는 반드시 참인 명제가 되어야 하는가?

● 명제 $p \longrightarrow q$가 참이 아닌 경우는 $p \not\Longrightarrow q$로 나타낸다.

일반적으로 두 조건 p, q에 대하여 명제 $p \longrightarrow q$가 참일 때, 이것을 기호로

$$p \Longrightarrow q$$

와 같이 나타낸다. 이때

p는 q이기 위한 **충분조건**

q는 p이기 위한 **필요조건**

이라고 한다.

> p이기 위한 필요조건
>
> $p \Rightarrow q$
>
> q이기 위한 충분조건

한편 $p \Longrightarrow q$이고 $q \Longrightarrow p$일 때, p는 q이기 위한 충분조건인 동시에 필요조건이다. 이것을 기호로

$$p \Longleftrightarrow q$$

와 같이 나타낸다. 이때

p는 q이기 위한 **필요충분조건**

이라고 한다.

● p가 q이기 위한 필요충분조건이면 q도 p이기 위한 필요충분조건이다.

예제 01

다음 두 조건 p, q에 대하여 p는 q이기 위한 어떤 조건인가?

(1) p : x는 8의 약수이다.　q : x는 16의 약수이다.

(2) p : $3x-2>1$, q : $x>1$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때, 다음이 성립하고 그 역도 성립한다.
- $p \Longrightarrow q$이면 $P \subset Q$
- $q \Longrightarrow p$이면 $Q \subset P$
- $p \Longleftrightarrow q$이면 $P = Q$

풀이 (1) 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$$P=\{1, 2, 4, 8\},\ Q=\{1, 2, 4, 8, 16\}$$

$P \subset Q$이므로 $p \Longrightarrow q$

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

(2) 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$$P=\{x \mid 3x-2>1\}=\{x \mid x>1\}$$

$$Q=\{x \mid x>1\}$$

$P=Q$이므로 $p \Longleftrightarrow q$

따라서 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

답 (1) 충분조건　(2) 필요충분조건

문제 1

다음 두 조건 p, q에 대하여 p는 q이기 위한 어떤 조건인가?

(1) p : x는 12의 약수이다.　q : x는 6의 약수이다.

(2) p : $x>3$, q : $x(x+2)>0$

문제 2

두 집합 A, B에 대하여 두 조건 p, q가 다음과 같을 때, p는 q이기 위한 어떤 조건인가?

$$p : A \cup B = B,\quad q : A \subset B$$

창의 up

실수 a, b, c에 대하여 두 조건 p, q가 다음과 같을 때, p는 q이기 위한 필요충분조건임을 설명하여라.

p : $|ab|+|bc|+|ca|=0$,

q : a, b, c 중에서 두 개 이상이 0이다.

05 절대부등식

● 절대부등식의 의미를 이해하고, 간단한 절대부등식을 증명할 수 있다.

절대부등식을 어떻게 증명하는가?

생각 열기

바이칼 호

시베리아 남동쪽에 있는 바이칼 호는 최대 수심이 1742 m로 세계에서 가장 깊은 호수이며, 2500만 년이라는 역사를 가진 세계에서 가장 오래된 호수이다. 바이칼 호는 오랜 역사와 고립된 위치에 있었기 때문에 다양한 생물 종이 서식하여 1996년 유네스코 세계 자연 유산으로 지정되었다. 호수 주변에는 2600여 종의 동식물이 살고 있으며 이 중 80 % 이상은 이곳에만 있는 고유종이다.

탐구 활동

바이칼 호의 수심은 1742 m로 세계의 호수 중에서 가장 깊다. 다음 물음에 답하여 보자.
(단, 단위는 m이다.)

1. 다음 □ 안에 알맞은 부등호를 써넣어 보자.

(백두산 천지의 수심) □ 1742

2. 부등식 (세계 모든 호수의 수심)$\leq$1742는 항상 성립한다고 말할 수 있는가?

부등식 $x^2-1<0$은 $-1<x<1$일 때에는 성립하지만 $x\leq-1$ 또는 $x\geq1$일 때에는 성립하지 않는다.

그러나 부등식 $x^2+1>0$은 모든 실수 x에 대하여 항상 성립한다.

이와 같이 부등식의 문자에 대입할 수 있는 모든 실수에 대하여 항상 성립하는 부등식을 **절대부등식**이라고 한다.

보기 부등식 $x+3>x$, $x^2-2x+2>0$은 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로 절대부등식이고, 부등식 $2x-3>0$, $x^2-2x\leq0$은 특정한 범위의 x의 값에 대해서만 성립하므로 절대부등식이 아니다.

문제 1 다음 중에서 절대부등식을 모두 찾아라.

㉠ $(a+b)^2\geq0$	㉡ $x^2+x+1<0$
㉢ $a>0$, $b>0$일 때, $ab>0$	㉣ $x>0$, $y<0$일 때, $x+y<0$

주어진 부등식이 절대부등식임을 증명할 때에는 그 부등식에 대입할 수 있는 모든 실수에 대하여 항상 성립하는 이유를 밝혀야 한다.

절대부등식의 증명에는 다음과 같은 실수의 성질이 자주 이용된다.

절대부등식의 증명에 이용되는 실수의 성질

a, b가 실수일 때

(1) $a>b \iff a-b>0$ (2) $a^2\geq 0$

(3) $a^2+b^2\geq 0$ (4) $a^2+b^2=0 \iff a=b=0$

(5) $|a|^2=a^2$ (6) $a>0$, $b>0$일 때, $a>b \iff a^2>b^2$

예제 01

a, b가 실수일 때, 부등식 $a^2-ab+b^2\geq 0$을 증명하여라.

등호가 포함된 부등식을 증명할 때에는 등호가 성립하는 경우의 조건도 밝혀 준다.

증명 $a^2-ab+b^2=a^2-ab+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+b^2=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2$

그런데 $\left(a-\frac{b}{2}\right)^2\geq 0$, $\frac{3}{4}b^2\geq 0$이므로 $\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geq 0$

따라서 $a^2-ab+b^2\geq 0$이다.

여기서 등호는 $a-\frac{b}{2}=0$, $b=0$, 즉 $a=b=0$일 때 성립한다.

문제 2 a, b가 실수일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

(1) $a^2+ab+b^2\geq 0$ (2) $4a^2-4ab+3b^2\geq 0$

예제 02

a, b, x, y가 실수일 때, 부등식 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$을 증명하여라.

이 부등식을 코시-슈바르츠 부등식이라고 한다.

증명
$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2&=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)\\&=a^2y^2+b^2x^2-2abxy\\&=(ay-bx)^2\geq 0\end{aligned}$$

따라서 $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geq(ax+by)^2$이다.

여기서 등호는 $ay=bx$일 때 성립한다.

문제 3 a, b, c가 실수일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

(1) $2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2$ (2) $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$

예제 03 $a>0$, $b>0$일 때, 부등식 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$를 증명하여라.

두 양수 a, b에 대하여 $\frac{a+b}{2}$, $\sqrt{ab}$를 각각 a와 b의 산술평균, 기하평균이라고 한다.

증명 $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}\,)^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b}\,)^2}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b}\,)^2}{2} \geq 0$

따라서 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$이다.

여기서 등호는 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, 즉 $a=b$일 때 성립한다.

문제 4 $a>0$, $b>0$일 때, 부등식 $\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$를 증명하여라.

두 양수 a, b에 대하여 $\frac{2ab}{a+b}$를 a와 b의 조화평균이라고 한다.

예제 04 a, b가 실수일 때, 부등식 $|a+b| \leq |a|+|b|$를 증명하여라.

(i) $a>0$, $b>0$일 때, $a>b \Longleftrightarrow a^2>b^2$
(ii) $|a|^2=a^2$

증명 $|a+b| \geq 0$, $|a|+|b| \geq 0$이므로 $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$임을 보이면 된다.

$$\begin{aligned}(|a|+|b|)^2-|a+b|^2 &= |a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2 \\ &= a^2+2|ab|+b^2-a^2-2ab-b^2 \\ &= 2(|ab|-ab)\end{aligned}$$

그런데 $|ab| \geq ab$이므로 $2(|ab|-ab) \geq 0$

따라서 $|a+b|^2 \leq (|a|+|b|)^2$이므로 $|a+b| \leq |a|+|b|$이다.

여기서 등호는 $|ab|=ab$, 즉 $ab \geq 0$일 때 성립한다.

문제 5 a, b가 실수일 때, 부등식 $|a|-|b| \leq |a-b|$를 증명하여라.

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

두 양수 a, b에 대하여 $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)$의 최솟값을 구하여 보자.

[해답 p.216]

중단원 기초

1 다음은 어떤 용어의 정의인지 말하여라.

01 명제와 증명
용어의 정의

(1) 네 변의 길이가 모두 같은 사각형

(2) 두 직선이 한 점에서 만날 때, 서로 이웃하지 않는 두 각

(3) 변의 길이가 모두 같고 각의 크기가 모두 같은 다각형

(4) 한 평면 위에서 한 점으로부터 같은 거리에 있는 모든 점들의 집합

2 다음에 주어진 문장이나 식을 명제와 조건으로 구별하고, 그것의 부정을 말하여라.

02 조건과 진리집합
명제와 조건의 부정

(1) $3<4$ (2) $2x=5$

(3) 6은 3의 약수이다. (4) x는 허수이다.

3 다음 명제의 역과 대우를 말하여라.

03 명제의 역과 대우

(1) 6의 약수는 12의 약수이다.

(2) 실수이면 복소수이다.

(3) $x^2=3x$이면 $x=0$이다.

(4) $x<3$이면 $x^2-5x+6<0$이다.

4 다음 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때, 두 집합 사이의 포함 관계를 이용하여 p는 q이기 위한 어떤 조건인지 말하여라.

04 필요조건과 충분조건

(1) p : x는 홀수이다. q : $x^2-4x+3=0$

(2) p : $x=1$, q : $x^2=x$

(3) p : $x(x-2)=0$, q : $x=0$ 또는 $x=2$

(4) p : $x^2-x-12>0$, q : $x<-3$

5 x, y가 실수일 때, 부등식 $x^2+y^2\geq 2xy$를 증명하여라.

05 절대부등식

[해답 p.216]

중단원 기본

1 전체집합 $U=\{x|x$는 자연수$\}$에 대하여 다음 조건의 부정을 말하고, 그것의 진리집합을 구하여라.

02 조건과 진리집합

(1) x는 10의 약수가 아니다. (2) $x^2-1=0$

(3) $|x-3|<4$ (4) $x^2+x-2\geq 0$

2 다음 명제의 역과 대우를 말하고, 그 각각의 참, 거짓을 판별하여라.

03 명제의 역과 대우

(1) 5의 약수는 10의 약수이다.

(2) $a<1$이면 $a^2<1$이다.

(3) 홀수의 제곱은 홀수이다.

(4) $ax=0$이면 $a=0$이다.

(5) 마름모는 사다리꼴이다.

3 두 명제 $p \longrightarrow \sim q$, $\sim p \longrightarrow r$가 참일 때, 다음 중에서 참인 것을 모두 찾아라.

03 명제의 역과 대우

㉠ $p \longrightarrow r$	㉡ $\sim r \longrightarrow p$
㉢ $q \longrightarrow \sim p$	㉣ $q \longrightarrow r$

4 두 조건

04 필요조건과 충분조건

$$p: -1<x<1,\ q: -a+2<x<a+5$$

에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건일 때, 실수 a의 최솟값을 구하여라.

5 $a>0$, $b>0$일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

05 절대부등식

(1) $a^3+b^3\geq ab(a+b)$ (2) $1+\dfrac{a}{2}>\sqrt{1+a}$

중단원 실력

수준별 학습

1 다음 명제의 부정을 말하고, 그것의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) 모든 실수 x의 제곱은 0보다 크다.

(2) 어떤 소수는 홀수가 아니다.

02 조건과 진리집합
'모든'과 '어떤'을 포함하는 명제의 부정

2 두 조건

$$p : x \le 1 \text{ 또는 } x > 2,\quad q : x^2-(5a-2)x+4a^2-5a+1 \le 0$$

에 대하여 명제 $\sim p \longrightarrow q$가 참이 되도록 하는 실수 a값의 범위를 구하여라.

02 조건과 진리집합

3 명제 'a, b가 양의 정수일 때, $a+b$가 홀수이면 a, b 중 하나는 홀수이고, 다른 하나는 짝수이다.' 가 참임을 귀류법으로 증명하여라.

03 명제의 역과 대우
귀류법

4 세 조건 p, q, r의 진리집합 P, Q, R가 $P \cap Q = P$, $Q \cap R = \varnothing$일 때, p는 $\sim r$이기 위한 어떤 조건인가?

04 필요조건과 충분조건

5 실수 x에 대한 다음 부등식이 항상 성립할 필요충분조건을 구하여라.
(단, a, b, c는 상수)

(1) $ax+b>0$

(2) $ax+b<0$

(3) $ax^2+bx+c>0$ (단, $a \neq 0$)

(4) $ax^2+bx+c<0$ (단, $a \neq 0$)

05 절대부등식

수행 과제

에피메니데스는 거짓말쟁이일까?

패러독스(paradox, 역설(逆說))는 일반적으로는 모순을 야기하지 않으나 특정한 경우에 모순을 일으키는 논증을 말한다. 유명한 패러독스 중 하나는 기원전 6세기에 크레타 섬에 살았던 시인이자 철학자인 에피메니데스의 이름을 빌린 '거짓말쟁이 패러독스'이다. 그 내용은 다음과 같다.

크레타 섬 출신의 철학자 에피메니데스는 말하였다. "모든 크레타인은 거짓말쟁이이다."

에피메니데스는 진실을 말하였는가?

| 과 제 | **1** 모든 크레타인이 실제로 거짓말쟁이일 때, 에피메니데스의 주장이 논리적으로 모순이 되는 이유를 말하여 보자.

| 과 제 | **2** 모든 크레타인이 실제로 거짓말쟁이가 아닐 때, 에피메니데스의 주장이 논리적으로 모순이 되는 이유를 말하여 보자.

| 과 제 | **3** 여러 가지 역설을 조사하고 발표하여 보자.

대단원 학습 내용 정리

1 집합

집합

(1) 집합: 주어진 조건에 의하여 그 대상을 분명히 알 수 있는 것들의 모임

(2) 원소: 집합을 이루는 대상 하나하나

(3) a가 집합 A의 원소일 때, $a \in A$로 나타낸다.

집합 사이의 포함 관계

(1) 집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속할 때, 집합 A를 집합 B의 부분집합이라고 하며 $A \subset B$로 나타낸다.

(2) 두 집합 A, B의 원소가 모두 같으면 $A=B$이다.

(3) $A \neq B$이고 $A \subset B$일 때, 집합 A를 집합 B의 진부분집합이라고 한다.

집합의 연산

(1) 합집합: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 또는 } x \in B\}$

(2) 교집합: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 그리고 } x \in B\}$

(3) $A \cap B = \varnothing$일 때, 집합 A와 집합 B는 서로소라고 한다.

(4) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(5) 여집합: $A^C = \{x \mid x \in U \text{ 그리고 } x \notin A\}$

(6) 차집합: $A - B = \{x \mid x \in A \text{ 그리고 } x \notin B\}$

집합의 연산법칙

(1) 교환법칙: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

(2) 결합법칙: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) 분배법칙: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(4) 차집합과 여집합의 성질: $A - B = A \cap B^C$
$(A^C)^C = A$
$A \cup A^C = U$, $A \cap A^C = \varnothing$
$U^C = \varnothing$, $\varnothing^C = U$

(5) 드모르간의 법칙: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

2 명제

명제와 증명

(1) 명제: 참인지 거짓인지를 명확히 판별할 수 있는 문장이나 식

(2) 명제 $p \longrightarrow q$에서 p를 가정, q를 결론이라고 한다.

(3) 증명: 명제의 가정으로부터 결론을 체계적으로 이끌어 내어 명제가 참인 이유를 설명하는 것

조건과 진리집합

(1) 조건: 변수 x의 값에 따라 참, 거짓이 결정되는 문장이나 식

(2) 명제 또는 조건 p에 대하여 'p가 아니다.'를 p의 부정이라 하고 $\sim p$로 나타낸다.

(3) 진리집합: 전체집합 U의 원소 중에서 조건 p가 참이 되도록 하는 모든 원소로 이루어진 집합

(4) 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때,
 (i) 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 $P \subset Q$이다.
 또 $P \subset Q$이면 $p \longrightarrow q$는 참이다.
 (ii) 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓이면 $P \not\subset Q$이다.
 또 $P \not\subset Q$이면 $p \longrightarrow q$는 거짓이다.

명제의 역과 대우

(1) 명제 $p \longrightarrow q$의 역: $q \longrightarrow p$
명제 $p \longrightarrow q$의 대우: $\sim q \longrightarrow \sim p$

(2) 명제와 그 대우의 참, 거짓은 일치한다.

(3) 귀류법: 명제의 결론을 부정하면 모순이 일어남을 보여 원래의 명제가 참임을 증명하는 방법

필요조건과 충분조건

(1) $p \Longrightarrow q$일 때: p는 q이기 위한 충분조건
q는 p이기 위한 필요조건

(2) $p \Longleftrightarrow q$일 때: p는 q이기 위한 필요충분조건

절대부등식

부등식의 문자에 대입할 수 있는 모든 실수에 대하여 항상 성립하는 부등식

용어와 기호 집합, 원소, 벤 다이어그램, 공집합, 부분집합, 진부분집합, 합집합, 교집합, (집합의) 서로소, 전체집합, 여집합, 차집합, (집합의) 교환법칙, (집합의) 결합법칙, (집합의) 분배법칙, 드모르간의 법칙, 명제, 가정, 결론, 정의, 증명, 정리, 조건, 부정, 진리집합, 역, 대우, 귀류법, 충분조건, 필요조건, 필요충분조건, 절대부등식, $a \in A$, $b \notin B$, $\varnothing$, $n(A)$, $A \subset B$, $A \not\subset B$, $A=B$, $A \neq B$, $A \cup B$, $A \cap B$, U, A^C, $A-B$, $p \longrightarrow q$, $\sim p$, $p \Longrightarrow q$, $p \Longleftrightarrow q$

대/단/원 평가 문제

선택형

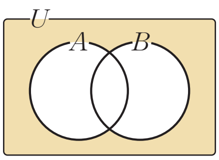
1 다음 중에서 집합인 것은?

① 복소수의 모임
② 귀여운 동물의 모임
③ 10에 가까운 소수의 모임
④ 우리나라에 있는 높은 산의 모임
⑤ 농구를 잘하는 학생의 모임

2 집합 $A=\{x|x$는 6의 약수$\}$에 대하여 다음 중에서 옳은 것은?

① $\varnothing \not\subset A$　② $\{2\} \subset A$
③ $\{3\} \in A$　④ $\{4, 6\} \subset A$
⑤ $\{1, 2, 6\}=A$

3 다음 중에서 오른쪽 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은?



① $A\cup B$
② $A\cap B$
③ $A^C\cup B^C$
④ $(A\cup B)^C$
⑤ $(A-B)\cup(B-A)$

4 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 중에서 $A\cap(A\cap B^C)^C$과 같은 집합은?

① U　② A　③ B
④ $A\cup B$　⑤ $A\cap B$

5 자연수 k의 배수를 원소로 하는 집합을 A_k라고 할 때, 다음 중에서 옳은 것은?

① $A_4\cap A_6=A_6$
② $A_2\cap(A_3\cup A_4)=A_6\cup A_8$
③ $A_3\cup A_4=A_6$
④ $A_2\cup(A_3\cap A_4)=A_6\cap A_8$
⑤ $(A_2\cup A_4)\cap A_3=A_6$

6 다음 두 조건 p, q에 대하여 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓인 것은?

① p: $x^2=1$,　q: $|x|=1$
② p: 12의 약수이다.　q : 6의 약수이다.
③ p: $x>0$,　q: $x^2>0$
④ p: $|x|<3$,　q: $x<3$
⑤ p: 사각형 ABCD는 마름모이다.
　q: 사각형 ABCD는 평행사변형이다.

7 전체집합 U에서 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자. $P\cap Q=\varnothing$일 때, 다음 명제 중에서 참인 것은?

① $q \longrightarrow p$　② $\sim q \longrightarrow p$
③ $p \longrightarrow \sim q$　④ $\sim p \longrightarrow q$
⑤ $\sim q \longrightarrow \sim p$

8 x가 실수일 때, 다음 조건 중에서 명제 '어떤 x에 대하여 p이다.'의 부정이 참인 것은?

① p: $x<0$　② p: $x=3$
③ p: $x^2\geq 0$　④ p: $x^2<0$
⑤ p: $x^2=x$

[해답 p.217]

9 다음 중에서 조건 p가 조건 q이기 위한 필요충분조건인 것을 모두 찾은 것은?

> ㉠ 두 집합 A, B에 대하여
> $p: A \subset B$, $q: A \cap B = A$
> ㉡ $p: 2014 \le x \le 2020$,
> $q: 2015 < x < 2021$
> ㉢ p: 삼각형 ABC는 직각삼각형이다.
> q: 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다.

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

10 실수 a, b에 대하여 다음의 A와 B의 대소를 비교하면?

> $A=(a^2+1)(b^2+1)$, $B=(ab+1)^2$

① $A>B$ ② $A<B$ ③ $A \ge B$
④ $A \le B$ ⑤ $A=B$

서답형

11 집합 $A=\{x \mid x$는 350의 소인수$\}$일 때, 집합 A의 진부분집합을 모두 구하여라.

12 두 집합 A, B에 대하여

$$n(A)=15,\ n(B)=10,\ n(A \cup B)=21$$

일 때, $n(A-B)$를 구하여라.

13 실수 x에 대하여 집합 A, B, C, D가 각각 다음과 같을 때, 조건 $g(x)<0 \le f(x)$의 진리집합을 A, B, C, D로 나타내어라.

> $A=\{x \mid f(x)=0\}$, $B=\{x \mid f(x)>0\}$
> $C=\{x \mid g(x)=0\}$, $D=\{x \mid g(x)>0\}$

14 다음 명제의 역과 대우를 말하고, 그 각각의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) x와 y가 짝수이면 xy는 홀수이다.
(2) 직사각형은 평행사변형이다.

|서|술|형|

15 실수 a에 대하여 다음 명제가 참임을 증명하여라.

> $a+2$가 무리수이면 a는 무리수이다.

|서|술|형|

16 두 조건

$$p:\ |x| \le a,\ q:\ -2 \le x \le 6$$

에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 a의 최댓값과 필요조건이 되도록 하는 a의 최솟값의 합을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라. (단, a는 양수이다.)

M+ History

수 학 + 역 사

마크 트웨인의 명제의 부정

마크 트웨인은 "톰 소여의 모험"과 "허클베리 핀의 모험"으로 우리에게 잘 알려져 있는 소설가이다. 그가 발표한 많은 작품들 중에 남북 전쟁이 끝난 이후 미국의 사회 상황을 풍자한 장편 소설 "금박시대"가 있는데, 1873년에 발표한 이 소설에서 그는 당시 미국 정부의 부패상과 정치인 그리고 자본가들의 야비한 실체를 적나라하게 폭로하였다. 이 소설이 출판되고 얼마 지나지 않아서 마크 트웨인은 기자들의 질문에 대답하면서 다음과 같이 말하였다.

"미국 국회의 어떤 의원은 나쁜 사람이다."

기자들이 이 말을 그대로 신문에 발표하자 워싱턴의 미국 국회 의원들은 일제히 마크 트웨인을 비난하였다.

그들은 그 말에 대하여 사실을 똑바로 밝히거나 잘못을 인정하는 성명을 발표하지 않으면 법적인 조치를 취하겠다고 위협하였다.

그래서 마크 트웨인은 다음과 같은 성명서를 발표하였다.

"며칠 전에 내가 '미국 국회의 어떤 의원은 나쁜 사람이다.' 라고 했는데 사람들이 그것은 사실이 아니라고 내게 말했다. 그래서 곰곰이 생각해 보니 내가 한 그 말은 잘못된 것이었다. 그래서 나는 오늘 특별히 성명을 발표하여 지난번에 내가 했던 말을 부정하여 '미국 국회의 어떤 의원은 나쁜 사람이 아니다.' 로 수정한다."

마크 트웨인은 자신이 처음에 한 말이 잘못되었다고 부정하기는 했지만, 결국은 처음에 한 말과 마찬가지의 교묘한 방법으로 미국 국회 의원을 경멸하는 자신의 뜻을 굽히지 않았던 것이다.

수학적으로 따지면 마크 트웨인이 한 말은 명제가 아니지만, 그의 말을 명제라고 가정할 때, 올바르게 부정하려면 그는 '미국 국회의 모든 의원은 나쁜 사람이 아니다.' 라고 했어야 한다.

사이버 가정 학습을 아시나요?

각 시도 교육청에서는 인터넷을 이용하여 학생들이 자율적으로 학습할 수 있도록 ‘사이버 가정 학습 사이트’를 운영하고 있다. 이 사이트를 활용하여 학습 효과를 높여 보자.

(1) 각 시도 교육청에서 운영하는 ‘사이버 가정 학습 사이트’의 주소는 다음과 같다.

서울특별시	http://www.kkulmat.com	부산광역시	http://cyber.busanedu.net
인천광역시	http://cyber.edu-i.org	대구광역시	http://estudy.edunavi.kr
대전광역시	http://djstudy.or.kr	광주광역시	http://edu.gedu.net
울산광역시	http://home.go.kr	경기도	http://danopy.goedu.kr
충청남도	http://smart.edus.or.kr	충청북도	http://star.cbedunet.or.kr
전라남도	http://cyber.jnei.or.kr	전라북도	http://eschool.jbedu.kr
경상남도	http://lms.gnedu.net	경상북도	http://lms.gyo6.net
강원도	http://ngcc.gweduone.net	제주특별자치도	http://jejuestudy.net

(2) ‘사이버 가정 학습 사이트’에서 고등학교 수학 자료를 찾아 학습에 활용하여 보자.

M+ Engineering 수 학 + 공 학

풍력 발전기의 전기 생산량은

바람의 세기에 대한 함수로 나타낼 수 있다.

Ⅱ 함수

| 준 | 비 | 학 | 습 |

중 ① 함수의 뜻

1 다음 중에서 y가 x의 함수인 것을 모두 찾고, 함수인 것은 x와 y 사이의 관계식을 구하여라.

(1) 한 권에 1000원 하는 공책 x권의 값 y원

(2) 한 변의 길이가 x cm인 정사각형의 넓이 y cm^2

(3) 자연수 x의 약수 y

중 ① 함숫값과 함수의 그래프

2 함수 $f(x)=\dfrac{6}{x}$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) $f(-2)$, $f(1)$의 값을 구하여라.

(2) 함수의 그래프를 그려라.

1

함수

컴퓨터의 IP 주소와 인터넷

인터넷상에서 각각의 컴퓨터는 다른 컴퓨터와 구별되도록 고유한 IP 주소를 가진다.

IP 주소 체계인 IPv4의 주소는 123.123.123.123과 같이 네 부분으로 나뉘며 각 부분은 0에서 255까지의 세자리 자연수로 이루어져 있어 $(256)^4=(2^8)^4=2^{32}$, 즉 약 43억 개이다. 하지만 인터넷에 연결되는 단말기들의 수가 기하급수적으로 증가하자 이를 수용하기 위해서 2^{128}, 즉 약 3.4×10^{38} 개의 주소를 갖는 IPv6이라는 새로운 주소 체계가 개발되었다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자.

88쪽

IP 주소 체계에서 함수를 찾을 수 있을까?

01 대응과 함수

● 함수의 뜻을 알고, 그 그래프를 이해한다.

대응이란 무엇인가?

생각 열기

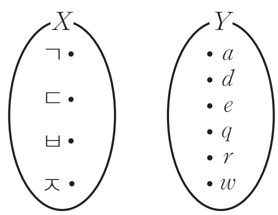
키보드

컴퓨터의 키보드는 한글, 알파벳, 숫자, 특수 기호 등 여러 가지 문자를 입력하도록 만든 장치이다. 키보드의 각 키에는 눌렀을 때 입력되는 여러 문자가 적혀 있다. 입력해야 할 문자의 수보다 키의 개수가 적으므로 하나의 키에는 보통 두 개 이상의 문자가 짝지어져 있다.

탐구 활동

생각 열기의 키보드를 보고, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 같은 키에 적혀 있는 한글과 알파벳을 서로 짝지을 때, 오른쪽 그림에서 집합 X에 있는 한글에 짝지어지는 알파벳을 집합 Y에서 찾아 화살표로 연결하여 보자.
2. 한글을 알파벳으로 잘못 입력하였더니 '$snfl$'이 되었다. 원래 입력하려던 한글은 무엇인가?

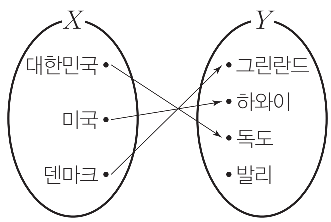


두 집합

$X=\{$대한민국, 미국, 덴마크$\}$,

$Y=\{$그린란드, 하와이, 독도, 발리$\}$

에 대하여 집합 X의 원소 x에 집합 Y의 원소 y가 'y는 x에 속한 영토'의 관계로 짝지어지면 오른쪽 그림과 같이 나타낼 수 있다.



이와 같이 집합 X의 원소에 집합 Y의 원소를 짝지은 것을 집합 X에서 집합 Y로의 **대응**이라고 한다.

이때 집합 X의 원소 x에 집합 Y의 원소 y가 짝지어지면 x에 y가 대응한다고 하며, 이것을 기호로 $x \longrightarrow y$와 같이 나타낸다.

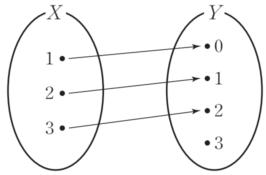
● X와 Y 사이의 대응이 아니라 X에서 Y로의 대응이므로 대응하는 두 집합 사이에는 화살표와 같은 대응 방향이 있다.

보기 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$에 대하여

(1) 집합 X의 각 원소 x에 집합 Y의 원소 y가 $y=x-1$의 관계로 대응할 때,

$$1 \longrightarrow 0,\quad 2 \longrightarrow 1,\quad 3 \longrightarrow 2$$

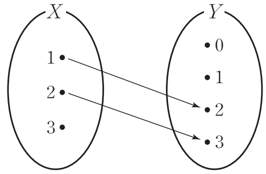
이므로 이 대응을 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.



(2) 집합 X의 각 원소 x에 집합 Y의 원소 y가 $y=x+1$의 관계로 대응할 때,

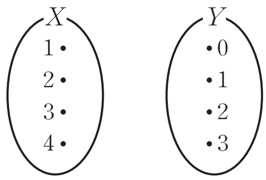
$$1 \longrightarrow 2,\quad 2 \longrightarrow 3$$

이고, 3에는 대응하는 원소가 없으므로 이 대응을 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.

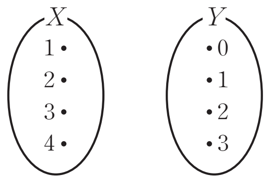


문제 1 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Y=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 집합 X의 각 원소 x에 집합 Y의 원소 y가 다음 관계에 의하여 대응한 것을 그림으로 나타내어라.

(1) $y=$(x의 약수의 개수)



(2) $y=$(x의 양의 제곱근)

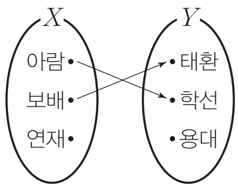


함수란 무엇인가?

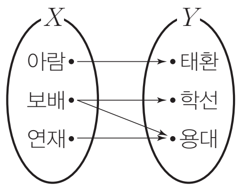
탐구 활동

어떤 토론에서 여학생이 남학생에게 질문할 차례가 되었다. 다음 그림의 ①, ②, ③은 질문할 여학생의 집합 X에서 답변할 남학생의 집합 Y로의 대응을 각각 나타낸 것이다.

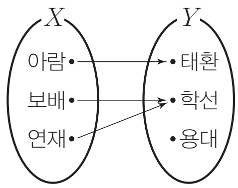
①



②



③



위의 대응을 보고, 다음 두 조건에 대하여 물음에 답하여 보자.

〈조건 1〉 모든 여학생은 남학생에게 질문을 한다.
〈조건 2〉 한 여학생이 두 명 이상의 남학생에게 질문을 할 수 없다.

1. 〈조건 1〉을 만족시키는 대응을 모두 찾아보자.

2. 〈조건 2〉를 만족시키는 대응을 모두 찾아보자.

3. 〈조건 1〉과 〈조건 2〉를 모두 만족시키는 대응을 찾아보자.

탐구 활동에서 ⟨조건 1⟩과 ⟨조건 2⟩를 모두 만족시키는 대응 ③은 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 오직 하나씩만 대응한다.

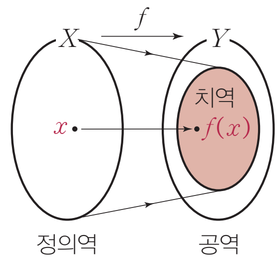
이와 같이 공집합이 아닌 두 집합 X, Y에 대하여 집합 X의 각 원소에 집합 Y의 원소가 하나씩만 대응할 때, 이 대응을 집합 X에서 집합 Y로의 함수라고 하며, 이것을 기호로

$$f: X \longrightarrow Y$$

와 같이 나타낸다.

함수를 나타내는 기호로, 흔히 함수를 뜻하는 'function'의 첫 글자 'f'와 f 다음의 알파벳인 g, h 등을 사용한다.

이때 집합 X를 함수 f의 **정의역**, 집합 Y를 함수 f의 **공역**이라고 한다.



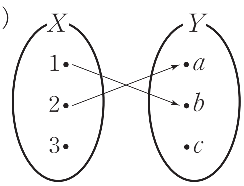
또 함수 f에 의하여 정의역 X의 각 원소 x에 공역 Y의 원소 y가 대응할 때, 이것을 기호로 $y=f(x)$와 같이 나타내고, $f(x)$를 함수 f에 의한 x의 함숫값이라고 한다.

그리고 함수 f의 함숫값 전체로 이루어진 집합 $\{f(x) \mid x \in X\}$를 함수 f의 **치역**이라고 한다.

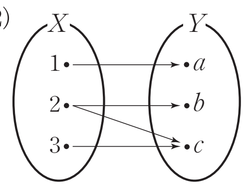
참고 함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 임의의 함숫값 $f(x)$ $(x \in X)$는 공역의 원소이다. 즉, $f(x) \in Y$이므로 치역 $\{f(x) \mid x \in X\}$는 항상 공역의 부분집합이다. 또한 치역 $\{f(x) \mid x \in X\}$를 간단히 $f(X)$로 나타내기도 한다.

예제 01 다음 대응 중에서 함수인 것을 찾고, 그 함수의 정의역, 공역, 치역을 구하여라.

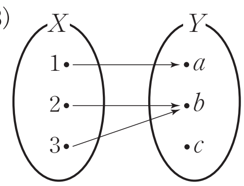
(1)



(2)



(3)



풀이 (1)은 X의 원소 3에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

(2)는 X의 원소 2에 대응하는 Y의 원소가 b, c로 2개이므로 함수가 아니다.

(3)은 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩만 대응하므로 함수이다.

한편 (3)에서 이 함수의 정의역은 $\{1, 2, 3\}$이고, 공역은 $\{a, b, c\}$이다. 또 함숫값은 $f(1)=a$, $f(2)=b$, $f(3)=b$이므로 치역은 $\{a, b\}$이다.

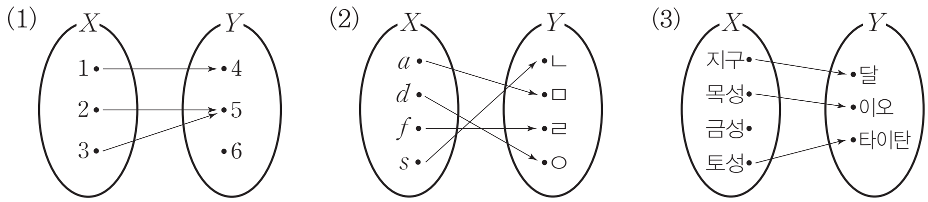
답 (1) 함수가 아니다. (2) 함수가 아니다.

(3) 함수이다.

정의역: $\{1, 2, 3\}$, 공역: $\{a, b, c\}$, 치역: $\{a, b\}$

문제 2 다음 대응 중에서 함수인 것을 찾고, 그 함수의 정의역, 공역, 치역을 구하여라.

(3) 이오는 목성의 위성, 타이탄은 토성의 위성이고 금성은 위성이 없다.



문제 3 다음 함수의 정의역은 $\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$이고 공역은 실수 전체의 집합일 때, 치역을 구하여라.

(1) $y=x^2$　　　　(2) $y=-2x+3$

함수 $y=f(x)$의 정의역이나 공역이 주어지지 않은 경우 정의역은 함숫값 $f(x)$가 정의될 수 있는 실수 x의 값 전체의 집합으로 생각하고, 공역은 실수 전체의 집합으로 생각한다.

보기 (1) 함수 $y=2x+1$의 정의역과 공역은 실수 전체의 집합이다.

(2) 함수 $y=\dfrac{1}{x-1}$의 정의역은 $x\neq1$인 실수 전체의 집합이고, 공역은 실수 전체의 집합이다.

문제 4 다음 함수의 정의역과 치역을 구하여라.

(1) $y=-x+2$　　　　(2) $y=|x|$

(3) $y=x^2-1$　　　　(4) $y=\dfrac{2}{x}$

등식 $f(x)=g(x)$는 함숫값이 같다는 뜻이고, 등식 $f=g$는 두 함수가 서로 같다는 뜻이다.

두 함수 f, g가 서로 같은 함수가 아닐 때, $f\neq g$로 나타낸다.

정의역과 공역이 각각 같은 두 함수 $f: X \longrightarrow Y$, $g: X \longrightarrow Y$가 정의역 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=g(x)$일 때, 두 함수 f와 g는 서로 같다고 하며, 이것을 기호로

$$f=g$$

와 같이 나타낸다.

보기 정의역과 공역이 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$인 두 함수 $f: X \longrightarrow X$, $g: X \longrightarrow X$에 대하여 $f(x)=|x|$, $g(x)=x^2$으로 정의하면

$$f(-1)=g(-1)=1,\quad f(0)=g(0)=0,\quad f(1)=g(1)=1$$

이므로 두 함수 f와 g는 서로 같다. 즉, $f=g$이다.

문제 5 정의역이 $X=\{a,\ b\}$인 두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=x+2$에 대하여 $f=g$일 때, 집합 X를 구하여라. (단, $a\neq b$)

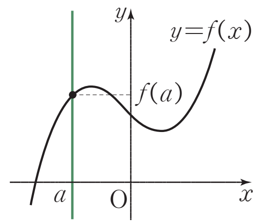
함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 원소 x와 이에 대응하는 함숫값 $f(x)$의 순서쌍 전체의 집합

$$G=\{(x,\ f(x))\mid x\in X\}$$

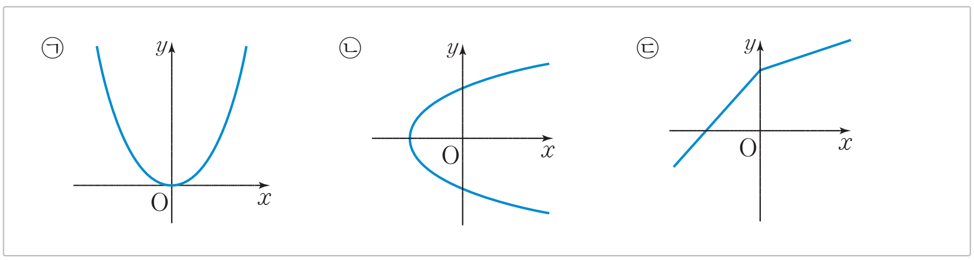
를 함수 f의 그래프라고 한다.

● 순서쌍 $(x,\ f(x))$는 좌표평면 위의 점 $(x,\ f(x))$에 대응하므로 그래프 G를 점의 집합으로 생각하여 좌표평면 위에 나타낼 수 있다.

이때 정의역의 원소에 공역의 원소는 두 개 이상 대응하지 않으므로 함수의 그래프는 정의역의 각 원소 a에 대하여 직선 $x=a$와 오직 한 점에서 만난다.



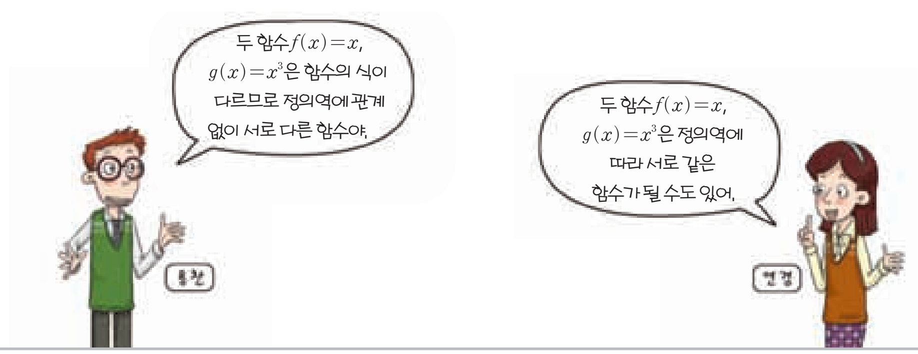
문제 6 다음 그림 중에서 함수의 그래프를 모두 찾아라.



사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

다음 중에서 누구의 말이 옳은지 토의하고, 그 근거를 제시하여 보자.



일대일함수와 일대일 대응이란 무엇인가?

탐구 활동

포크 댄스 동아리에서 남학생과 여학생이 한 명씩 짝을 정하려고 한다. 남학생의 집합을 정의역, 여학생의 집합을 공역으로 생각하고, 각 남학생에 여학생을 한 명씩 대응시키면 이 대응은 항상 함수가 되지만 다음의 이유로 남녀 학생이 한 명씩 짝지어지지 않을 수도 있다.

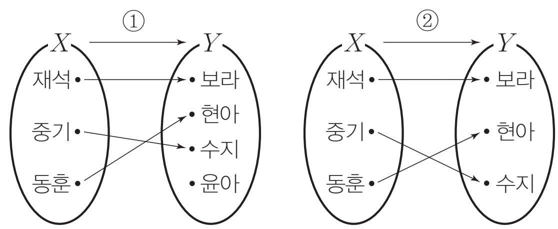
> (1) 어떤 여학생은 두 명 이상의 남학생과 짝이 될 수 있다.
> (2) 어떤 여학생은 짝이 없을 수도 있다.

다음 물음에 답하여 보자.

1. (1)의 경우가 생기지 않으려면 어떤 조건이 필요한지 생각하여 보자.

2. (2)의 경우가 생기지 않으려면 어떤 조건이 필요한지 생각하여 보자.

다음 그림과 같은 집합 X에서 집합 Y로의 함수 ①과 함수 ②는 정의역 X의 서로 다른 원소에 공역 Y의 서로 다른 원소가 대응한다.



이와 같이 함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여

$$x_1 \neq x_2\text{이면 } f(x_1) \neq f(x_2)$$

가 성립할 때, 이 함수 f를 **일대일함수**라고 한다.

'$x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$'의 대우인 '$f(x_1)=f(x_2)$이면 $x_1=x_2$'가 성립하여도 함수 f는 일대일함수이다.

한편 함수 ②는 일대일함수이면서 공역과 치역이 같다.

이와 같이 일대일함수 중에서 공역 Y의 모든 원소가 대응하여 치역과 공역이 일치하는 함수를 **일대일 대응**이라고 한다.

즉, 일대일 대응인 함수 $f: X \longrightarrow Y$는 다음 두 조건을 모두 만족시킨다.

일대일 대응

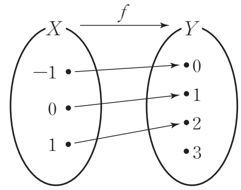
(1) 정의역 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여

$$x_1 \neq x_2\text{이면 } f(x_1) \neq f(x_2)$$

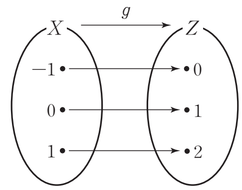
(2) 치역과 공역이 같다.

보기 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, $Z=\{0,\ 1,\ 2\}$에 대하여

(1) 함수 $f:X \longrightarrow Y$, $f(x)=x+1$은 오른쪽 그림과 같이 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이므로 일대일함수이다.



(2) 함수 $g:X \longrightarrow Z$, $g(x)=x+1$은 오른쪽 그림과 같이 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $g(x_1) \neq g(x_2)$이고, 치역과 공역이 같으므로 일대일 대응이다.



문제 7 집합 $X=\{0,\ 1,\ 2\}$, $Y=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$, $Z=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 다음과 같이 정의된 함수 f 중에서 일대일함수인 것과 일대일 대응인 것을 각각 찾아라.

㉠ $f:X \longrightarrow Y$, $f(x)=\lvert x-1 \rvert$	㉡ $f:X \longrightarrow Y$, $f(x)=x+1$
㉢ $f:X \longrightarrow Z$, $f(x)=x+1$	㉣ $f:X \longrightarrow Z$, $f(x)=x^2-x+1$

예제 02

함수 $f(x)=2x-1$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 정의역과 공역이 실수 전체의 집합일 때, 함수 f는 일대일 대응임을 보여라.

(2) 정의역이 $X=\{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$, 공역이 $Y=\{y \mid -1 \leq y \leq 6\}$일 때, 함수 f는 일대일함수이지만 일대일 대응은 아님을 보여라.

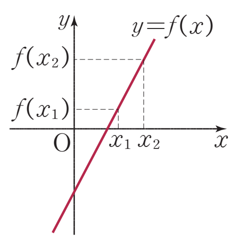
증명 (1) 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면

$$\begin{aligned} f(x_1)-f(x_2) &= 2x_1-1-(2x_2-1) \\ &= 2(x_1-x_2) \neq 0 \end{aligned}$$

즉, $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이다.

한편 치역과 공역은 실수 전체의 집합으로 일치한다.

따라서 함수 $f(x)=2x-1$은 일대일 대응이다.



(2) (1)에서 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이므로 정의역이 $X=\{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$일 때에도 함수 $f(x)=2x-1$은 일대일함수이다.

한편 $0 \leq x \leq 2$일 때, $-1 \leq 2x-1 \leq 3$이므로 치역은 $\{y \mid -1 \leq y \leq 3\}$이다.

따라서 치역과 공역이 일치하지 않으므로 함수 $f(x)=2x-1$은 일대일함수이지만 일대일 대응은 아니다.

문제 8 정의역과 공역이 모두 실수 전체의 집합일 때, 다음 함수가 일대일 대응인지 아닌지 판단하고 그 이유를 설명하여라.

(1) $f(x)=3x+1$ (2) $f(x)=x^2+1$

발전

문제 9 두 집합 $X=\{x\,|\,-2\le x\le 2\}$, $Y=\{y\,|\,a\le y\le b\}$에 대하여

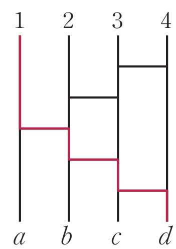
$$f:\ X \longrightarrow Y,\ f(x)=2x+1$$

로 정의되는 함수 f가 일대일 대응이 되도록 두 실수 a, b의 값을 구하여라.

사고력 기르기

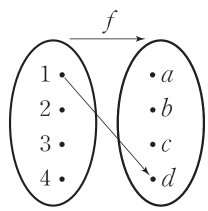
▶추론
의사소통
문제 해결

오른쪽 그림에서 다음과 같은 방법으로 사다리 타기 게임을 할 때, 물음에 답하여 보자.

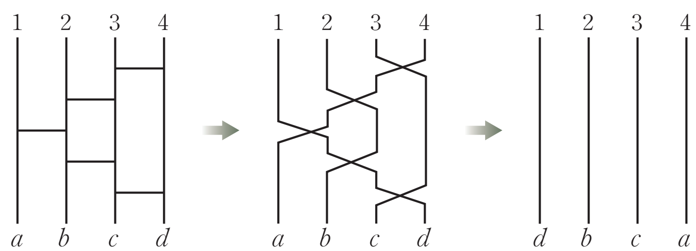


> 시작점 1, 2, 3, 4 중 하나를 택하여 세로줄을 따라 아래로 내려가면서 가로줄이 나오면 가로줄을 따라 옆으로 이동하고 세로줄이 나오면 아래로 이동하여 a, b, c, d 중 한 곳에 도착한다.

(1) 오른쪽 그림의 대응 f는 사다리 타기의 시작점에 도착점을 대응시킨 것이다. 이 그림을 완성하여 보자.



(2) 다음 그림을 이용하여 사다리 타기의 시작점과 도착점의 대응은 사다리의 모양에 관계없이 항상 일대일 대응인 것을 설명하여 보자.



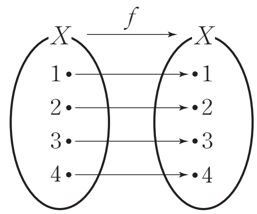
항등함수와 상수함수란 무엇인가?

탐구 활동 **우리 학교 학생 전체의 집합에서 우리 학교 선생님 전체의 집합으로의 대응에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.**

1. 모든 학생에 교장 선생님을 대응시킬 때, 이 대응은 함수인가?

2. **1**의 대응이 함수라면 이 함수의 치역을 구하여 보자.

오른쪽 그림의 함수 f는 정의역과 공역이 같고, 정의역 X의 임의의 원소 x에 그 자신인 공역 X의 원소 x가 대응한다.



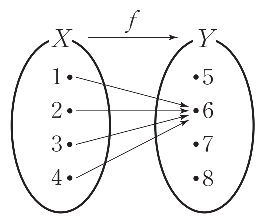
이와 같이 함수 $f: X \longrightarrow X$에서 정의역 X의 임의의 원소 x에 대하여

$$f(x)=x$$

인 함수를 집합 X에서의 **항등함수**라고 한다.

항등함수는 일대일 대응이다.

한편 오른쪽 그림의 함수 f는 정의역 X의 모든 원소 x에 공역 Y의 단 하나의 원소 6이 대응한다.



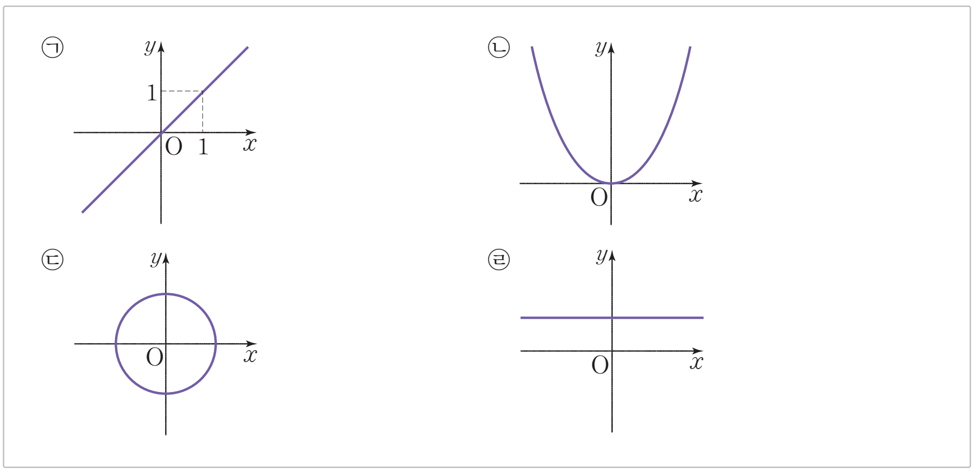
이와 같이 함수 $f: X \longrightarrow Y$에서 정의역 X의 모든 원소 x에 대하여

$$f(x)=c \ (c\text{는 상수})$$

인 함수 f를 **상수함수**라고 한다.

상수함수의 치역의 원소는 1개이다.

문제 10 다음 중에서 일대일 대응, 항등함수, 상수함수의 그래프를 각각 찾아라.



02

합성함수와 역함수

- 함수의 합성을 이해하고, 합성함수를 구할 수 있다.
- 역함수의 뜻을 알고, 주어진 함수의 역함수를 구할 수 있다.

합성함수란 무엇인가?

생각 열기

악기의 분류

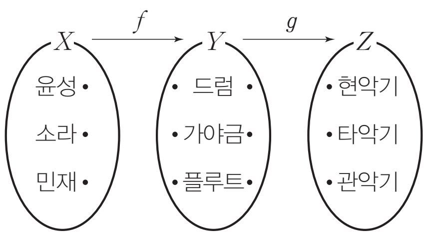
일반적으로 악기는 연주하는 방법에 따라 줄을 통해 소리를 내는 현악기, 입으로 불어서 소리를 내는 관악기, 두드려서 소리를 내는 타악기 등으로 분류한다. 현악기에는 가야금, 거문고, 바이올린 등이 있고, 관악기에는 대금, 플루트, 트럼펫 등이 있으며, 타악기에는 장구, 징, 드럼 등이 있다.

탐구 활동

다음은 윤성이네 반에서 축제 때 악기 연주를 할 학생의 이름과 악기, 그리고 그 악기의 분류를 표로 나타낸 것이다. 표를 보고 물음에 답하여 보자.

이름	악기	악기의 분류
윤성	가야금	현악기
소라	플루트	관악기
민재	드럼	타악기

1. 다음 집합 X, Y, Z에 대하여 각 학생의 이름에 연주하는 악기를 대응시키는 것을 함수 $f: X \longrightarrow Y$, 각 악기에 악기의 분류를 대응시키는 것을 함수 $g: Y \longrightarrow Z$라고 할 때, 두 함수의 대응 관계를 각각 그림으로 나타내어 보자.

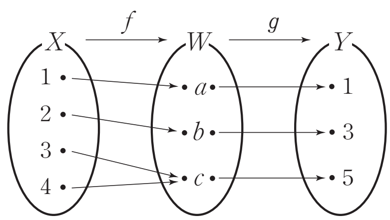


2. 함수 f에 의하여 '민재'에 대응하는 Y의 원소를 찾고, 함수 g에 의하여 그 원소에는 Z의 어떤 원소가 대응하는지 알아보자.
3. 2와 같은 방법으로 X의 각 원소에 Z의 원소를 대응시키면 이 대응은 함수가 되는지 알아보자.

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $W=\{a,\ b,\ c\}$, $Y=\{1,\ 3,\ 5\}$에 대하여 두 함수

$$f: X \longrightarrow W,\ g: W \longrightarrow Y$$

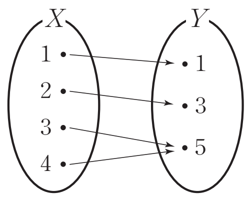
가 다음 그림과 같이 주어질 때, 두 함수 f와 g에 의하여 정해지는 집합 X에서 집합 Y로의 대응을 생각하여 보자.



집합 X의 임의의 원소 x에 집합 W의 원소 $f(x)$를 대응시키고, 다시 이 $f(x)$에 집합 Y의 원소 $g(f(x))$를 연속적으로 대응시키면 다음과 같다.

$$g(f(1))=g(a)=1,\ g(f(2))=g(b)=3,$$
$$g(f(3))=g(c)=5,\ g(f(4))=g(c)=5$$

이때 집합 X에서 집합 Y로의 대응은 다음 그림과 같다.



따라서 이 대응은 집합 X를 정의역, 집합 Y를 공역으로 하는 함수가 된다.

X의 각 원소 x에 Y의 원소 $y=g(f(x))$가 하나씩만 대응하므로 이 대응은 함수가 된다.

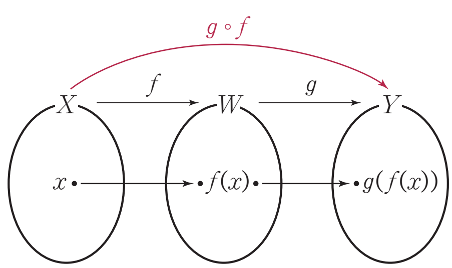
일반적으로 두 함수 $f: X \longrightarrow W$, $g: W \longrightarrow Y$에 대하여 집합 X의 임의의 원소 x에 집합 Y의 원소 $g(f(x))$를 대응시키면 X를 정의역, Y를 공역으로 하는 새로운 함수를 얻는다.

이 함수를 함수 f와 g의 **합성함수**라고 하며, 이것을 기호로

$$\boldsymbol{g \circ f}$$

와 같이 나타낸다.

함수 f의 치역이 함수 g의 정의역의 부분집합일 때에만 합성함수 $g \circ f$가 정의된다.



한편 합성함수 $g\circ f$에 의한 x의 함숫값을

$$(g\circ f)(x)$$

와 같이 나타낸다. 즉, $(g\circ f)(x)=g(f(x))$이므로 두 함수 f와 g의 합성함수를

$$y=g(f(x))$$

로도 나타낸다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

합성함수

두 함수 $f: X \longrightarrow W$, $g: W \longrightarrow Y$의 합성함수 $g\circ f$는

$$g\circ f: X \longrightarrow Y,\quad (g\circ f)(x)=g(f(x))\ (x\in X)$$

$(g\circ f)(x)\neq g(x)f(x)$인 것에 주의한다.

예제 01 두 함수 $f(x)=x+1$, $g(x)=2x$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) $(g\circ f)(1)$과 $(f\circ g)(1)$의 값을 구하여라.

(2) 합성함수 $g\circ f$와 $f\circ g$를 구하여라.

풀이 (1) $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(1+1)=g(2)=2\times2=4$

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(2\times1)=f(2)=2+1=3$

(2) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x+1)=2(x+1)=2x+2$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x)=2x+1$

답 (1) $(g\circ f)(1)=4$, $(f\circ g)(1)=3$

(2) $(g\circ f)(x)=2x+2$, $(f\circ g)(x)=2x+1$

문제 1 두 함수 $f(x)=x-1$, $g(x)=x^2+1$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) $(g\circ f)(2)$　　(2) $(f\circ g)(2)$

(3) $(g\circ f)(x)$　　(4) $(f\circ g)(x)$

예제 1과 문제 1의 결과에서 $g\circ f\neq f\circ g$임을 알 수 있다.

일반적으로 함수의 합성에 대하여 교환법칙이 성립하지 않는다.

창의 up

송이는 매달 x원의 용돈을 받는다. 용돈 x원에 용돈을 10 % 인상한 값이 대응하는 함수를 f, 1000원 인하한 값이 대응하는 함수를 g라고 할 때, 두 합성함수 $f \circ g$와 $g \circ f$ 중 송이에게 유리한 함수를 말하고, 그 이유를 설명하여라. (단, $x>1000$)

예제 02 세 함수 $f(x)=3x$, $g(x)=x^2$, $h(x)=x+2$에 대하여 다음 합성함수를 구하여라.

(1) $(h \circ (g \circ f))(x)$ (2) $((h \circ g) \circ f)(x)$

풀이 (1) $(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(3x)=(3x)^2=9x^2$이므로

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(x)&=h((g \circ f)(x))=h(9x^2)\\&=9x^2+2\end{aligned}$$

(2) $(h \circ g)(x)=h(g(x))=h(x^2)=x^2+2$이므로

$$\begin{aligned}((h \circ g) \circ f)(x)&=(h \circ g)(f(x))=(h \circ g)(3x)\\&=(3x)^2+2=9x^2+2\end{aligned}$$

답 (1) $9x^2+2$ (2) $9x^2+2$

문제 2 세 함수 $f(x)=x+1$, $g(x)=2x$, $h(x)=x^2$에 대하여 다음 합성함수를 구하여라.

(1) $(h \circ (g \circ f))(x)$ (2) $((h \circ g) \circ f)(x)$

예제 2와 문제 2의 결과에서 $h \circ (g \circ f)=(h \circ g) \circ f$임을 알 수 있다.

일반적으로 세 함수 f, g, h에 대하여 $h \circ (g \circ f)$와 $(h \circ g) \circ f$가 정의될 때,

$$(h \circ (g \circ f))(x)=h((g \circ f)(x))=h(g(f(x)))$$
$$((h \circ g) \circ f)(x)=(h \circ g)(f(x))=h(g(f(x)))$$

이므로 $h \circ (g \circ f)=(h \circ g) \circ f$이다.

따라서 함수의 합성에 대하여 결합법칙이 성립한다.

이상에서 배운 합성함수의 성질에 대하여 정리하면 다음과 같다.

합성함수의 성질

(1) 함수의 합성에 대하여 교환법칙이 성립하지 않는다.

$$g \circ f \neq f \circ g$$

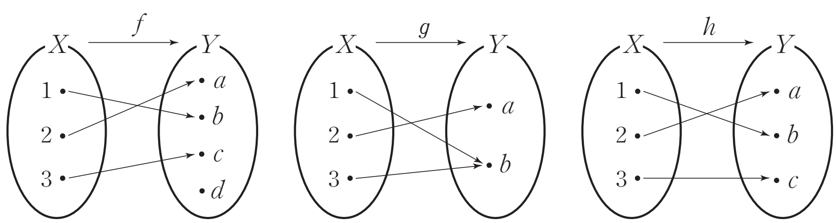
(2) 함수의 합성에 대하여 결합법칙이 성립한다.

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

역함수란 무엇인가?

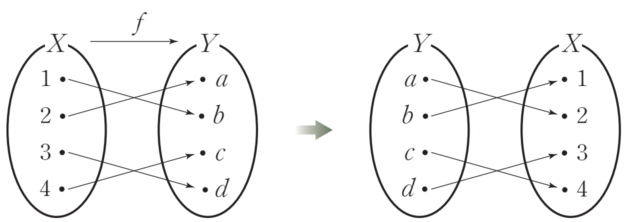
탐구 활동

다음 그림의 함수 f에서 반대 방향으로의 대응을 생각하면 Y의 원소 a, b, c에 X의 원소 2, 1, 3이 각각 대응하고, d에 대응하는 X의 원소는 없다. 이와 같이 세 함수 f, g, h에 대하여 반대 방향으로의 대응을 생각할 때, 다음 물음에 답하여 보자.



1. 세 함수 f, g, h의 반대 방향으로의 대응 중에서 함수인 것을 찾고, 그 이유를 말하여 보자.
2. 세 함수 f, g, h의 반대 방향으로의 대응 중에서 함수가 아닌 것을 찾고, 그 이유를 말하여 보자.

다음 그림과 같은 집합 X에서 집합 Y로의 함수 f에 대하여 그 반대 방향으로의 대응을 생각하여 보자.



함수 $f: X \longrightarrow Y$는 일대일 대응이므로 함수 f의 반대 방향으로의 대응에서 집합 Y의 각 원소에 집합 X의 원소가 오직 하나씩만 대응하고, 대응하지 않는 Y의 원소는 없다. 따라서 함수 f의 반대 방향으로의 대응은 집합 Y를 정의역, 집합 X를 공역으로 하는 함수가 된다.

일반적으로 함수 $f: X \longrightarrow Y$, $y=f(x)$가 일대일 대응일 때, 집합 Y의 임의의 원소 y에 $f(x)=y$인 집합 X의 원소 x를 대응시키면 집합 Y를 정의역, 집합 X를 공역으로 하는 새로운 함수를 얻는다.

이 함수를 함수 $f: X \longrightarrow Y$의 **역함수**라고 하며, 이것을 기호로

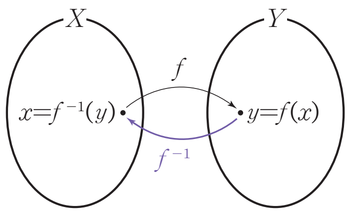
$$\boldsymbol{f^{-1}}$$

와 같이 나타낸다. 즉,

$$f^{-1}: Y \longrightarrow X,\ \ x=f^{-1}(y)$$

이다.

- 함수 f가 일대일 대응일 때에만 역함수 f^{-1}가 정의된다.
- 함수 f와 역함수 f^{-1}의 정의역과 공역은 서로 반대이다.



이때 역함수의 정의에 의해서 집합 X의 임의의 원소 x에 대하여

$$y=f(x) \Longleftrightarrow x=f^{-1}(y)$$

이므로

$$(f^{-1} \circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)=x \ \ (x \in X)$$
$$(f \circ f^{-1})(y)=f(f^{-1}(y))=f(x)=y \ \ (y \in Y)$$

임을 알 수 있다. 즉, $f^{-1} \circ f$는 집합 X에서의 항등함수이고, $f \circ f^{-1}$는 집합 Y에서의 항등함수이다.

또 역함수의 정의에서 $x \in X$에 대하여

$$(f^{-1})^{-1}(x)=f(x)$$

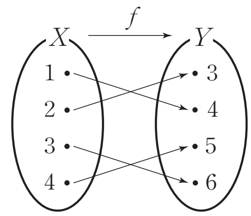
임을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

역함수의 성질

함수 $f: X \longrightarrow Y$가 일대일 대응이면
(1) 역함수 $f^{-1}: Y \longrightarrow X$가 존재한다.
(2) $y=f(x) \Longleftrightarrow x=f^{-1}(y)$
(3) $(f^{-1} \circ f)(x)=x \ (x \in X)$, $(f \circ f^{-1})(y)=y \ (y \in Y)$
(4) $(f^{-1})^{-1}(x)=f(x) \ (x \in X)$

문제 3 오른쪽 그림의 함수 $f: X \longrightarrow Y$에 대하여 다음을 구하여라.



(1) $f^{-1}(6)$　　(2) $(f \circ f^{-1})(4)$

(3) $(f^{-1} \circ f)(4)$　　(4) $(f^{-1})^{-1}(3)$

함수를 나타낼 때, 보통 정의역에 속하는 원소를 x, 공역에 속하는 원소를 y로 나타내므로 역함수 $x=f^{-1}(y)$에서 x와 y를 서로 바꾸어

$$y=f^{-1}(x)$$

로 나타내고, 이를 $y=f(x)$의 역함수라고 한다.

이제 일대일 대응에 대하여 그 역함수를 구하는 방법을 예제를 통하여 알아보자.

예제 03 함수 $y=2x-1$의 역함수를 구하여라.

역함수 구하기

$y=f(x)$

↓ x에 대하여 정리한다.

$x=f^{-1}(y)$

↓ x와 y를 바꾼다.

$y=f^{-1}(x)$

풀이 함수 $y=2x-1$은 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=2x-1$을 x에 대하여 정리하면

$$x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$$

여기서 변수 x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

답 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

문제 4 다음 함수 중에서 역함수가 존재하는 것을 찾고, 그 역함수를 구하여라.

(1) $y=-x+1$　　(2) $y=x^2$　　(3) $y=\frac{1}{3}x+1$

발전

문제 5 일차함수 $f(x)=ax+b$에 대하여 다음 물음에 답하여라. (단, a, b는 상수이다.)

(1) $f=f^{-1}$일 조건을 구하여라.

(2) $f=f^{-1}$이면 $f \circ f=I$임을 보여라. (단, I는 항등함수이다.)

실생활

문제 6 섭씨온도는 얼음의 녹는점을 $0\,^\circ\mathrm{C}$, 물의 끓는점을 $100\,^\circ\mathrm{C}$로 하여 그 사이를 100등분한 온도 단위이고, 화씨온도는 얼음의 녹는점을 $32\,^\circ\mathrm{F}$, 물의 끓는점을 $212\,^\circ\mathrm{F}$로 하여 그 사이를 180등분한 온도 단위이다. 화씨온도 $x\,^\circ\mathrm{F}$를 섭씨온도 $y\,^\circ\mathrm{C}$로 바꾸는 식이 $y=\frac{5}{9}(x-32)$일 때, 섭씨온도 $x\,^\circ\mathrm{C}$를 화씨온도 $y\,^\circ\mathrm{F}$로 바꾸는 식을 구하고 두 함수의 관계를 말하여라.

역함수의 그래프에는 어떤 성질이 있는가?

탐구 활동

● 준비물
투명 종이, 연필, 자

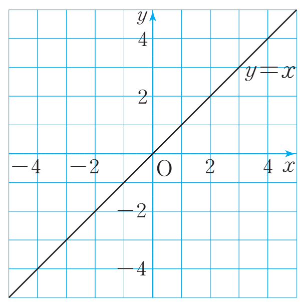
함수 $y=2x+1$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 함수 $y=2x+1$의 역함수를 구하여 보자.

2. 오른쪽 좌표평면 위에 함수 $y=2x+1$의 그래프와 그 역함수의 그래프를 그려 보자.

3. 오른쪽 좌표평면 위에 투명 종이를 대고, 직선 $y=x$와 **2**에서 그린 그래프를 그려 보자.

4. **3**의 투명 종이를 직선 $y=x$를 접는 선으로 하여 접어서 두 그래프가 어떻게 되는지 알아보자.

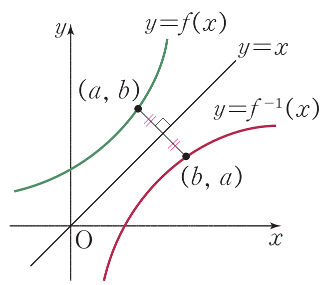


탐구 활동에서 함수 $y=2x+1$의 그래프와 그 역함수 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭임을 알 수 있다.

함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$가 존재할 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 임의의 점의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하면 다음이 성립한다.

$$b=f(a) \Longleftrightarrow a=f^{-1}(b)$$

따라서 점 $(b,\ a)$는 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프 위에 있다.



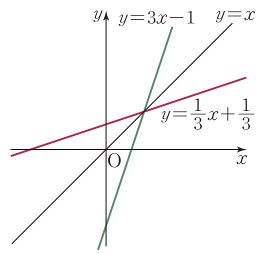
그런데 점 $(a,\ b)$와 점 $(b,\ a)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

역함수의 그래프의 성질

함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

보기 함수 $y=3x-1$의 역함수는 $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$이고, 이 두 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



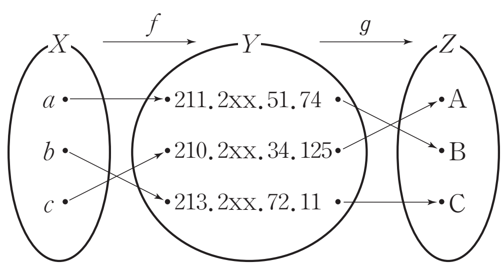
문제 7 다음 함수의 그래프와 그 역함수의 그래프를 같은 좌표평면 위에 그려라.

(1) $y=2x$ (2) $y=-x+2$

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

각각의 컴퓨터는 고유한 IP 주소를 가지며, 각 IP 주소를 통해 컴퓨터가 있는 지역을 알 수 있다. 세 대의 컴퓨터 a, b, c를 원소로 하는 집합 X, 세 개의 IP 주소를 원소로 하는 집합 Y, 세 지역 A, B, C를 원소로 하는 집합 Z에 대하여 두 함수 $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$가 다음과 같을 때, 물음에 답하여라.



(1) $(g \circ f)(a)$를 구하여라.

(2) $(f^{-1} \circ g^{-1})(\mathrm{C})$를 구하여라.

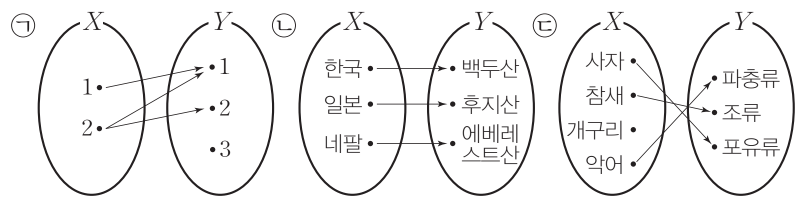
[해답 p.220]

중단원 기초

수준별 학습

1 다음 대응 중에서 함수인 것을 찾아라.

01 대응과 함수
함수의 뜻



2 정의역이 $X=\{0,\ 1\}$일 때, 다음 중에서 함수 $y=x^2$과 서로 같은 함수를 모두 찾아라.

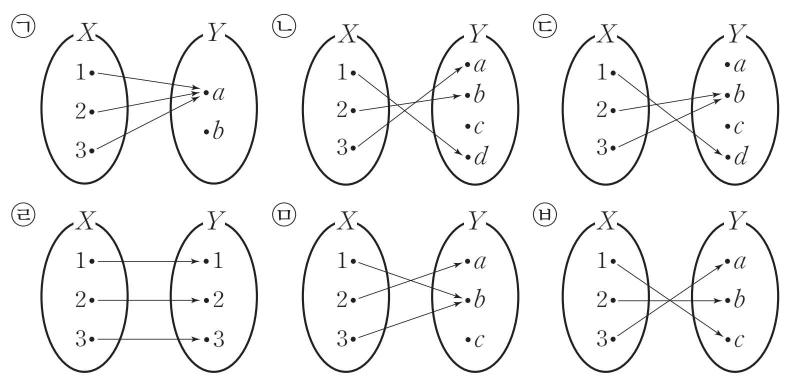
01 대응과 함수
서로 같은 함수

㉠ $y=x$	㉡ $y=\lvert x\rvert$	㉢ $y=-x+1$

3 보기의 대응을 보고, 다음에 해당하는 함수를 모두 찾아라.

01 대응과 함수
여러 가지 함수

보기



(1) 일대일함수　　(2) 일대일 대응

(3) 항등함수　　(4) 상수함수

4 두 함수 $f(x)=-2x$, $g(x)=x^2$에 대하여 다음을 구하여라.

02 합성함수와 역함수
합성함수

(1) $(g\circ f)(1)$　　(2) $(f\circ g)(1)$

(3) $(g\circ f)(x)$　　(4) $(f\circ g)(x)$

5 다음 함수의 역함수를 구하여라.

02 합성함수와 역함수
역함수

(1) $f(x)=x-1$　　(2) $g(x)=-2x+1$

중단원 기본

1 두 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 X의 원소 x에 Y의 원소를 보기와 같이 대응시킬 때, 다음 물음에 답하여라.

01 대응과 함수
함수와 일대일 대응

보기	
㉠ $x \longrightarrow \lvert x \rvert$	㉡ $x \longrightarrow x^2$
㉢ $x \longrightarrow x+2$	㉣ $x \longrightarrow x+1$

(1) 함수인 것을 모두 찾고, 각 함수의 치역을 구하여라.
(2) 일대일 대응인 함수를 찾아라.

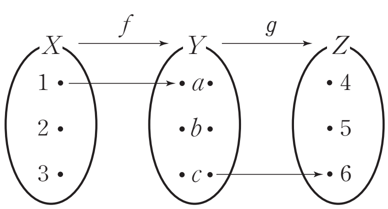
2 정의역이 $X=\{1,\ 2\}$인 두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=ax+b$에 대하여 $f=g$일 때, 상수 a, b의 값을 구하여라.

01 대응과 함수
서로 같은 함수

3 세 함수 $f(x)=x-2$, $g(x)=-x^2$, $h(x)=-2x$에 대하여
$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$가 성립함을 보여라.

02 합성함수와 역함수
합성함수

4 세 집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{a, b, c\}$, $Z=\{4, 5, 6\}$에 대하여 두 함수 $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$가 일대일 대응이고, $f(1)=a$, $g(c)=6$, $(g\circ f)(2)=4$를 만족시킬 때, 다음 값을 구하여라.



02 합성함수와 역함수

(1) $f(3)$
(2) $(g\circ f)(1)$
(3) $g^{-1}(4)$
(4) $(f^{-1}\circ g^{-1})(5)$

5 함수 $f(x)=5x-4$의 역함수를 $y=g(x)$라고 할 때, 방정식 $f(x)=g(x)$의 근을 구하여라.

02 합성함수와 역함수
역함수

[해답 p.220]

중단원 실력

수준별 학습

1 2 이상의 자연수로 이루어진 집합 X를 정의역으로 하는 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 모두 만족시킬 때, $f(36)$의 값을 구하여라.

(i) p가 소수이면 $f(p)=p$이다.
(ii) 정의역 X에 속하는 임의의 a, b에 대하여

$$f(ab)=f(a)+f(b)$$

01 대응과 함수
함수

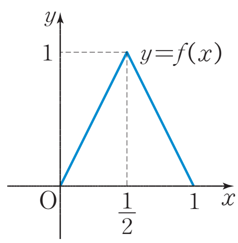
2 실수 전체의 집합 R에 대하여 함수 $f: R \longrightarrow R$를

$$f(x)=|x|+ax+1$$

로 정의할 때, 함수 f가 일대일 대응이 되도록 실수 a값의 범위를 구하여라.

01 대응과 함수
일대일 대응

3 $0 \le x \le 1$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $f(f(x))=\frac{1}{2}$의 실근의 개수를 구하여라.



02 합성함수와 역함수
합성함수

4 실수 전체의 집합 R에 대하여 함수 $f: R \longrightarrow R$를

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x\text{가 유리수일 때}) \\ 0 & (x\text{가 무리수일 때}) \end{cases}$$

로 정의할 때, 합성함수 $f \circ f$의 치역을 구하여라.

02 합성함수와 역함수
합성함수

5 함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$에 대하여 $f^{-1}(0)=5$이다. $h(x)=f(2x-1)$을 만족시키는 함수 $y=h(x)$의 역함수 $y=h^{-1}(x)$에 대하여 $h^{-1}(0)$의 값을 구하여라.

02 합성함수와 역함수
역함수

2 유리함수와 무리함수

모래시계 속의 함수

모래시계는 가운데가 잘록한 유리그릇에 마른 모래를 넣고 중력으로 서서히 모래가 떨어지면 그 부피로 시간을 재는 장치로 14세기부터 쓰이기 시작하여 15세기에 이르러 널리 이용되었다.

19세기까지는 배의 속력을 측정하기 위하여 28초짜리 모래시계가 많이 사용되었는데, 14.4 m마다 매듭(노트, knot)이 있는 줄 끝에 나무토막을 매달아 배의 측면에서 바다에 던져 첫 번째 매듭이 손에서 벗어날 때부터 모래시계로 시간을 재기 시작하고 28초 동안 손을 지나간 매듭의 수를 세어 배의 속력을 측정하였다고 한다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 101쪽

모래시계의 위에 남은 모래의 양과 아래로 떨어진 모래의 양의 비율을 시간에 대한 함수로 나타낼 수 있을까?

01 유리함수

● 유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다.

유리식이란 무엇인가?

생각 열기 **유람선**

유람선은 사적이나 명승지가 많은 강, 호수 등을 관람하는 배이다. 옛날에는 선체도 약했고 설비도 빈약하여 사고가 자주 일어났지만, 최근에는 좌석도 많고 안전한 호화 유람선이 많으며 호버크라프트와 같은 고속 유람선도 나오고 있다. 우리나라의 한강에도 1986년 10월부터 잠실, 뚝섬, 여의도 간을 오가는 관광 유람선이 운항되고 있다.

탐구 활동 **한강 유람선이 잠실 선착장과 여의도 선착장의 두 지점을 일정한 속력 v km/h로 왕복한다고 하자. 두 지점 사이의 거리는 15 km이고, 강물은 잠실 선착장에서 여의도 선착장 방향으로 a km/h의 속력으로 흐른다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.**

1. 유람선이 여의도 선착장에서 잠실 선착장으로 올라갈 때 걸리는 시간을 v와 a를 사용한 식으로 나타내어 보자.
2. 유람선이 잠실 선착장에서 여의도 선착장으로 내려갈 때 걸리는 시간을 v와 a를 사용한 식으로 나타내어 보자.
3. 유람선이 잠실 선착장과 여의도 선착장 사이를 왕복하는 데 걸리는 시간을 v와 a를 사용한 식으로 나타내어 보자.

두 정수 a, b $(b\neq0)$에 대하여 $\frac{a}{b}$의 꼴로 나타나는 수를 유리수라고 하는 것과 마찬가지로 두 다항식 A, B $(B\neq0)$에 대하여 $\frac{A}{B}$의 꼴로 나타나는 식을 **유리식**이라고 한다. 특히 분모 B가 0이 아닌 상수이면 유리식 $\frac{A}{B}$는 다항식이 된다.

예를 들어 $3x+5$, $\frac{x+3}{2}$, $\frac{y}{x}$, $\frac{xy}{x+y}$는 모두 유리식이고, 이 중에서 $3x+5$, $\frac{x+3}{2}$은 다항식이다.

유리식은 유리수와 마찬가지로 분자, 분모에 0이 아닌 다항식을 곱하거나 나누어도 그 값은 변하지 않는다.

유리식의 성질

세 다항식 $A,\ B,\ C\ (B\neq0,\ C\neq0)$에 대하여

(1) $\dfrac{A}{B}=\dfrac{A\times C}{B\times C}$

(2) $\dfrac{A}{B}=\dfrac{A\div C}{B\div C}$

유리식을 통분할 때에는 유리식의 성질을 이용하여 분자, 분모에 0이 아닌 다항식을 곱하여 계산한다.

문제 1 다음 두 유리식을 통분하여라.

(1) $\dfrac{1}{x^2-2x},\ \dfrac{3}{x^2+x}$

(2) $\dfrac{2}{x^2-2x-3},\ \dfrac{1}{x^2-3x}$

한편 유리식의 분자와 분모에 공통인 인수가 있을 때에는 유리식의 성질을 이용하여 분자, 분모의 공통인 인수로 나누어 식을 간단히 할 수 있다.

문제 2 다음 유리식을 간단히 하여라.

(1) $\dfrac{9x^2y^3z^2}{3x^3yz}$

(2) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$

유리식의 덧셈과 뺄셈은 유리수의 덧셈, 뺄셈과 같은 방법으로 한다.

예제 01 다음 식을 계산하여라.

(1) $\dfrac{1}{x+3}+2$ (2) $\dfrac{x+5}{x^2-1}-\dfrac{2}{x^2+x}$

다항식 A, B, $C(C\neq0)$에 대하여

(1) 덧셈: $\dfrac{A}{C}+\dfrac{B}{C}=\dfrac{A+B}{C}$

(2) 뺄셈: $\dfrac{A}{C}-\dfrac{B}{C}=\dfrac{A-B}{C}$

풀이 (1) $\dfrac{1}{x+3}+2=\dfrac{1+2(x+3)}{x+3}=\dfrac{2x+7}{x+3}$

(2) $\dfrac{x+5}{x^2-1}-\dfrac{2}{x^2+x}=\dfrac{x+5}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{2}{x(x+1)}$

$=\dfrac{x^2+3x+2}{x(x+1)(x-1)}=\dfrac{\cancel{(x+1)}(x+2)}{x\cancel{(x+1)}(x-1)}=\dfrac{x+2}{x(x-1)}$

답 (1) $\dfrac{2x+7}{x+3}$ (2) $\dfrac{x+2}{x(x-1)}$

문제 3 다음 식을 계산하여라.

(1) $\dfrac{x+4}{x^2-x-2}+\dfrac{x+3}{x^2-1}$ (2) $\dfrac{-3}{2x+1}-1$

유리식의 곱셈과 나눗셈은 유리수의 곱셈, 나눗셈과 같은 방법으로 한다.

예제 02 다음 식을 계산하여라.

(1) $\dfrac{x+4}{x^2-2x-3}\times\dfrac{x^2-3x}{x-2}$ (2) $\dfrac{x-2}{x^2-1}\div\dfrac{3x-6}{x^2-x}$

다항식 A, B, C, $D(B\neq0$, $D\neq0)$에 대하여

(1) 곱셈: $\dfrac{A}{B}\times\dfrac{C}{D}=\dfrac{AC}{BD}$

(2) 나눗셈:

$\dfrac{A}{B}\div\dfrac{C}{D}=\dfrac{A}{B}\times\dfrac{D}{C}=\dfrac{AD}{BC}$

(단, $C\neq0$)

풀이 (1) $\dfrac{x+4}{x^2-2x-3}\times\dfrac{x^2-3x}{x-2}=\dfrac{x+4}{(x+1)\cancel{(x-3)}}\times\dfrac{x\cancel{(x-3)}}{x-2}=\dfrac{x(x+4)}{(x+1)(x-2)}$

(2) $\dfrac{x-2}{x^2-1}\div\dfrac{3x-6}{x^2-x}=\dfrac{x-2}{x^2-1}\times\dfrac{x^2-x}{3x-6}$

$=\dfrac{\cancel{x-2}}{(x+1)\cancel{(x-1)}}\times\dfrac{x\cancel{(x-1)}}{3\cancel{(x-2)}}=\dfrac{x}{3(x+1)}$

답 (1) $\dfrac{x(x+4)}{(x+1)(x-2)}$ (2) $\dfrac{x}{3(x+1)}$

문제 4 다음 식을 계산하여라.

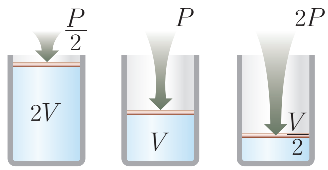
(1) $\dfrac{x^2-1}{(x+2)^2}\times\dfrac{3x+2}{x-1}$ (2) $\dfrac{x-3}{x^2+3x+2}\div\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+5x+4}$

유리함수란 무엇인가?

생각 열기

보일 법칙

자연계에서 변화하는 양들 사이에는 여러 가지 법칙이 성립한다. 온도가 일정할 때, 압력이 커지면 기체의 부피는 줄어들고, 압력이 작아지면 기체의 부피는 늘어난다. 이와 같이 일정한 온도에서 기체의 부피 V는 압력 P에 반비례하는데, 이것을 보일 법칙이라고 한다.



탐구 활동

다음 물음에 답하여 보자.

1. 어떤 기체의 압력 x와 부피 y가 보일 법칙을 따를 때, 다음 표를 완성하여 보자.

압력(x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
부피(y)			1		

2. 부피 y를 $y=$(x에 대한 식)의 꼴로 나타낼 때, 우변의 식은 유리식인가?

함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 유리식일 때, 이 함수를 **유리함수**라고 한다. 특히 유리함수 중에서 $f(x)$가 x에 대한 다항식일 때, 이 함수를 **다항함수**라고 한다.

유리함수에서 정의역이 주어지지 않은 경우에는 분모를 0으로 하는 원소를 제외한 실수 전체의 집합을 정의역으로 한다.

보기 (1) 두 함수 $y=x-1$, $y=x^2-2x-1$은 유리함수이며, 특히 다항함수이다.

(2) 두 함수 $y=\frac{3}{x}$, $y=\frac{2x+1}{x-1}$은 유리함수이다.

이때 함수 $y=\frac{3}{x}$의 정의역은 $\{x \mid x\neq 0$인 실수$\}$이고,

함수 $y=\frac{2x+1}{x-1}$의 정의역은 $\{x \mid x\neq 1$인 실수$\}$이다.

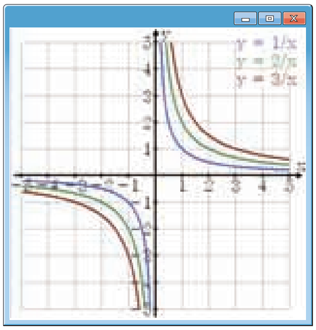
문제 5 다음 유리함수의 정의역을 구하여라.

(1) $y=\frac{x+1}{2}$ (2) $y=\frac{2}{x-1}$ (3) $y=\frac{x+1}{x+2}$

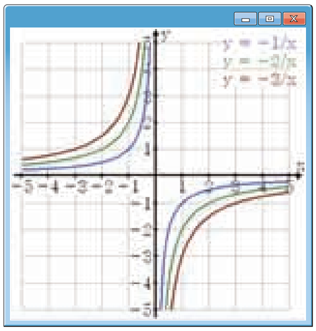
유리함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 어떻게 그리는가?

유리함수 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq0)$의 그래프를 k의 여러 가지 값에 대하여 그리면 다음과 같은 한 쌍의 매끄러운 곡선이 그려짐을 중학교에서 배웠다.

$k>0$



$k<0$



위의 그림에서 그래프 위의 점은 x의 절댓값이 커질수록 x축에 가까워지고 x의 절댓값이 작아질수록 y축에 가까워진다.

이와 같이 곡선이 어떤 직선에 한없이 가까워질 때, 이 직선을 그 곡선의 **점근선**이라고 한다.

따라서 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq0)$의 점근선은 x축과 y축이고, 점근선의 방정식은 $y=0$과 $x=0$이다.

또 $|k|$의 값이 커질수록 그래프가 원점에서 멀어진다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

유리함수 $y=\frac{k}{x}$ $(k\neq0)$의 그래프

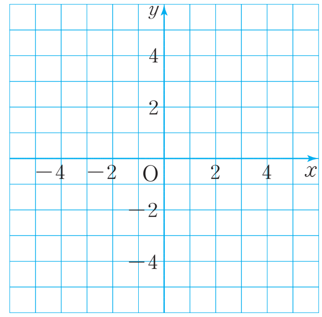
(1) 정의역과 치역은 모두 0을 제외한 실수 전체의 집합이다.
(2) $k>0$이면 그래프는 제1, 3사분면에 있고,
$k<0$이면 그래프는 제2, 4사분면에 있다.
(3) 원점과 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 곡선이다.
(4) 점근선은 x축과 y축이다.
(5) $|k|$의 값이 커질수록 그래프가 원점에서 멀어진다.

- $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭
$\Longleftrightarrow$ $y=f(x)$와 $-y=f(-x)$의 그래프가 일치
- $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭
$\Longleftrightarrow$ $y=f(x)$와 $x=f(y)$의 그래프가 일치

문제 6 다음 유리함수의 그래프를 오른쪽 좌표평면 위에 그려라.

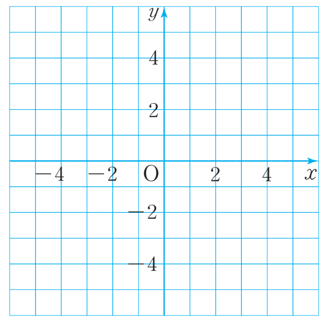
(1) $y=\dfrac{2}{x}$　　　　(2) $y=-\dfrac{2}{x}$

(3) $y=\dfrac{5}{x}$　　　　(4) $y=-\dfrac{5}{x}$



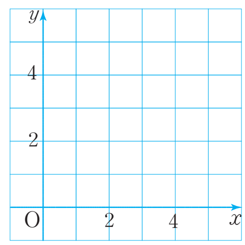
문제 7 다음 유리함수의 그래프를 오른쪽 좌표평면 위에 그려라.

(1) $y=\dfrac{3}{2x}$　　　　(2) $y=-\dfrac{3}{2x}$



실생활

문제 8 전류의 세기 I암페어(A)와 전압의 세기 V볼트(V), 저항의 크기 R옴(Ω) 사이의 관계를 나타내는 옴의 법칙은 $I=\dfrac{V}{R}$의 관계식으로 나타낼 수 있다. 어떤 휴대 전화의 전지의 전압이 4 V로 일정할 때, 다음 물음에 답하여라. (단, $R>0$)



(1) 전류 I와 저항 R 사이의 관계식을 구하여라.

(2) 저항 R를 x축, 전류 I를 y축으로 하는 그래프를 오른쪽 좌표평면 위에 그려라.

사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

평균 속력 x km/h로 일정한 거리 d km를 이동할 때 걸리는 시간을 y시간이라고 하면

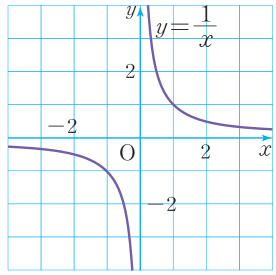
$$y=\frac{d}{x}$$

로 나타낼 수 있다. 이와 같이 생활 주변에서 두 변수 x, y 사이에 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq0)$의 관계가 있는 것을 조사하여 식으로 나타내고 발표하여 보자.

유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$의 그래프를 어떻게 그리는가?

탐구 활동

유리함수 $y=\dfrac{1}{x}$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.



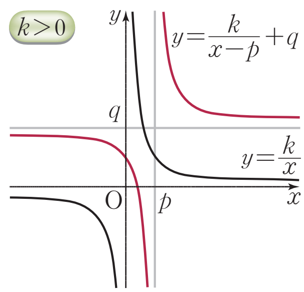
1. 오른쪽 좌표평면 위에 유리함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 그리고, 이 그래프를 나타내는 함수를 구하여 보자.

2. **1**의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프를 그리고, 이 그래프를 나타내는 함수를 구하여 보자.

$y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $y-q=f(x-p)$이다.

유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은 $x=p$, $y=q$이다.



이상에서 다음을 알 수 있다.

유리함수 $y=\dfrac{k}{x-p}+q\ (k\neq0)$의 그래프

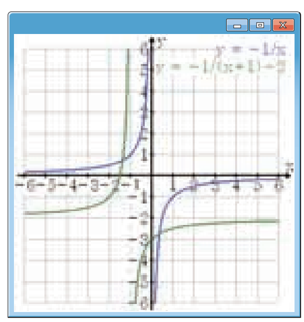
(1) 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

(2) 정의역은 p를 제외한 실수 전체의 집합이고, 치역은 q를 제외한 실수 전체의 집합이다.

(3) 점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이고, 점근선의 방정식은 $x=p$, $y=q$이다.

보기 유리함수 $y=-\dfrac{1}{x+1}-2$의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은 $x=-1$, $y=-2$이다.



문제 9 다음 유리함수의 그래프를 그리고, 점근선의 방정식을 구하여라.

(1) $y=\dfrac{1}{x-1}+1$ (2) $y=-\dfrac{2}{x+2}-1$

유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프를 어떻게 그리는가?

탐구 활동

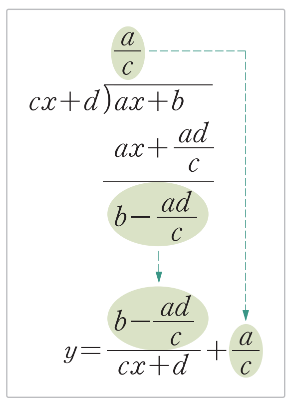
유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k\neq0)$의 그래프를 평행이동하여 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq0,$ $ad-bc\neq0)$의 그래프를 그릴 수 있는지 알아보려고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 유리함수 $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$을 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ (p, q는 상수)의 꼴로 나타내어 보자.

2. 유리함수 $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 어떻게 평행이동한 것인가?

유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq0,\ ad-bc\neq0)$의 그래프는 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ $(k\neq0)$의 꼴로 변형한 다음 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 평행이동하여 그릴 수 있다.

$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$를 변형하면



$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{b-\dfrac{ad}{c}}{cx+d}+\frac{a}{c}$$
$$=\frac{\dfrac{bc-ad}{c^2}}{x+\dfrac{d}{c}}+\frac{a}{c}=\frac{k}{x-p}+q$$
$$\left(k=\frac{bc-ad}{c^2},\ p=-\frac{d}{c},\ q=\frac{a}{c}\right)$$

가 된다. 따라서 유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

예제 03 유리함수 $y=\dfrac{3x+8}{x+3}$ 의 그래프를 그리고, 점근선의 방정식을 구하여라.

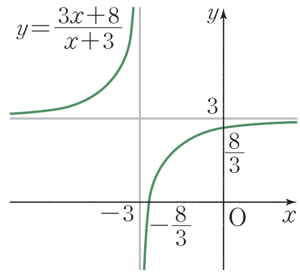
$$\begin{array}{r} 3 \\ x+3\overline{)3x+8} \\ \underline{3x+9} \\ -1 \end{array}$$

$y=\dfrac{-1}{x+3}+3$

풀이 $y=\dfrac{3x+8}{x+3}=\dfrac{3(x+3)-1}{x+3}=-\dfrac{1}{x+3}+3$이므로

유리함수 $y=\dfrac{3x+8}{x+3}$ 의 그래프는 함수 $y=-\dfrac{1}{x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 점근선의 방정식은 $x=-3$, $y=3$이다.



문제 10 다음 유리함수의 그래프를 그리고, 점근선의 방정식을 구하여라.

(1) $y=\dfrac{-3x-4}{x+1}$

(2) $y=\dfrac{x+1}{2x+1}$

문제 11 유리함수 $y=\dfrac{ax+1}{x+b}$ 의 그래프의 점근선이 직선 $x=1$, $y=2$가 되도록 상수 a, b의 값을 구하여라.

실생활

문제 12 농도가 20 %인 설탕물 100 g이 있다. 이 설탕물에 물 $9x$ g과 설탕 x g을 넣은 후의 농도를 y %라고 할 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리고, 점근선의 방정식을 구하여라.

(설탕물의 농도) $=\dfrac{(\text{설탕의 양})}{(\text{설탕물의 양})}\times 100(\%)$

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

1초당 1 g의 모래가 아래로 떨어지는 모래시계가 있다. 처음 모래의 양이 300 g일 때, 함수 $f(t)=\dfrac{(t\text{초 후 위에 남은 모래의 양})}{(t\text{초 후 아래로 떨어진 모래의 양})}$ 의 그래프를 그려라. (단, $0<t\leq 300$)

02 무리함수

● 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프의 성질을 이해한다.

무리식이란 무엇인가?

생각 열기

스키드 마크(Skid Mark)

스키드 마크란 자동차의 브레이크가 작동하여 바퀴가 구르지 않고 미끄러질 때 도로 면에 나타나는 타이어 자국을 말한다. 스키드 마크의 길이를 알면 도로의 종류와 상태에 따른 마찰 계수를 적용하여 제동하기 직전의 자동차의 속력을 추정할 수 있다. 따라서 스키드 마크는 교통사고의 원인을 밝히는 중요한 단서가 된다.

탐구 활동

어느 도로에서 스키드 마크의 길이를 S m, 마찰 계수를 F, 제동 직전의 승용차의 속력을 V km/h라고 하면

$$V=\sqrt{254\times S\times F}$$

의 관계식이 성립한다고 하자. 아스팔트 포장도로의 상태에 따른 승용차의 마찰 계수가 오른쪽 표와 같을 때, 다음 물음에 답하여 보자.

도로의 상태	마찰 계수
건조할 때	0.8
비가 내릴 때	0.6
눈이 내리거나 얼었을 때	0.3

1. 비가 내리는 날과 눈이 내리는 날 각각 길이가 S m인 스키드 마크가 하나씩 생겼을 때, 제동 직전의 두 승용차의 속력을 추정하여 보자.

2. 눈이 내리는 날 길이가 10 m, 40 m인 스키드 마크 두 개가 생겼을 때, 제동 직전의 두 승용차의 속력을 추정하여 보자. (단, 반올림하여 소수 첫째 자리까지 구한다.)

다음과 같이 근호 안에 문자가 포함되어 있는 식으로, 유리식으로 나타낼 수 없는 식을 **무리식**이라고 한다.

$$\sqrt{3x},\quad \sqrt{x^2-1},\quad 2+\sqrt{x},\quad \frac{1}{\sqrt{4-x}}$$

무리식의 값이 실수가 되려면 근호 안의 식의 값이 0 이상이어야 하므로 무리식을 계산할 때에는

$$(\text{근호 안의 식의 값})\ge 0$$

이 되는 문자의 값의 범위에서만 생각한다.

● 무리식에 분모가 있는 경우에는 분모가 0이 되도록 하는 문자의 값을 제외하고 생각한다.

보기 (1) 무리식 $\sqrt{1-x}$는 $1-x\geq 0$, 즉 $x\leq 1$인 범위에서만 생각한다.
(2) 무리식 $x+\sqrt{x+2}$는 $x+2\geq 0$, 즉 $x\geq -2$인 범위에서만 생각한다.

문제 1 다음 무리식의 값이 실수가 되도록 x값의 범위를 구하여라.

(1) $\sqrt{2x-1}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$　　(3) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+1}$

무리식의 계산은 무리수의 계산과 같은 방법으로 한다.

특히 분모에 무리식이 있는 경우, 분자와 분모에 적당한 식을 곱하여 분모를 유리화한다.

예제 01 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

풀이 (1) $(\sqrt{x+3}-\sqrt{x})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x})=(\sqrt{x+3})^2-(\sqrt{x})^2$

$=(x+3)-x=3$

(2) $$\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}$$

$$=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x-1})^2}=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{(x+1)-(x-1)}$$

$$=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}$$

답 (1) 3　(2) $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}$

문제 2 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\dfrac{2x\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}\times\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$　　(2) $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

무리함수란 무엇인가?

생각 열기 **지진 해일**

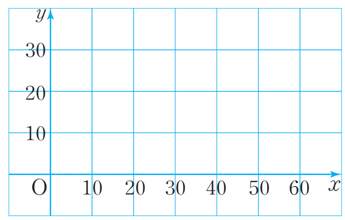
지진으로 인한 지각 변동에 의하여 갑자기 바닷물이 크게 일어서 육지로 넘쳐 들어오는 것을 지진 해일이라고 한다. 이때 바닷물이 상하로 진동하고 그것이 대규모의 파동이 되어 외부로 퍼져 나가는데, 이 속도를 지진 해일의 전파 속도라고 한다. 지진 해일의 전파 속도는 바다의 깊이에 대한 함수로 나타난다.

탐구 활동 **바다의 깊이를 x m, 지진 해일의 전파 속도를 y m/s라고 하면 $y=\sqrt{9.8x}$의 관계식이 성립한다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.**

1. 다음 표를 완성하여 보자. (단, 반올림하여 소수 첫째 자리까지 구한다.)

x	0	10	20	30	40	50	60
y	0			17.1			24.2

2. **1**의 표에서 구한 순서쌍 $(x,\ y)$를 오른쪽 좌표평면 위에 점으로 나타낸 후 곡선으로 매끄럽게 이어 보자.



함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 무리식일 때, 이 함수를 **무리함수**라고 한다.

무리함수에서 정의역이 주어지지 않은 경우에는 근호 안의 식의 값이 0 이상이 되도록 하는 실수 전체의 집합을 정의역으로 한다.

분모에 무리식을 포함하는 무리함수의 경우, 분모가 0이 되도록 하는 원소는 정의역에서 제외된다.

보기 함수 $y=\sqrt{x-2}$, $y=\sqrt{-2x+4}$는 무리함수이다. 이때 무리함수 $y=\sqrt{x-2}$의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge2\}$이고, 무리함수 $y=\sqrt{-2x+4}$의 정의역은 $\{x\,|\,x\le2\}$이다.

문제 3 다음 중에서 무리함수인 것을 찾고, 그 함수의 정의역을 구하여라.

(1) $y=\sqrt{2}x+\sqrt{3}$ (2) $y=\sqrt{2x+3}$

(3) $y=\dfrac{\sqrt{2}}{x}$ (4) $y=\sqrt{-\dfrac{1}{2}x+2}$

무리함수 $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프를 어떻게 그리는가?

무리함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프는 그 역함수를 이용하면 쉽게 그릴 수 있다.

함수 $y=\sqrt{x}$는 정의역 $\{x\,|\,x\ge 0\}$에서 치역 $\{y\,|\,y\ge 0\}$으로의 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=f(x)$의 역함수 구하기
❶ 일대일 대응인지 확인한다.
❷ $y=f(x)$를 x에 대하여 정리하여 $x=f^{-1}(y)$의 꼴로 나타낸다.
❸ x와 y를 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$의 꼴로 나타낸다.

역함수를 구하기 위하여 $y=\sqrt{x}\ (x\ge 0)$를 x에 대하여 정리하면

$$x=y^2\ (y\ge 0)$$

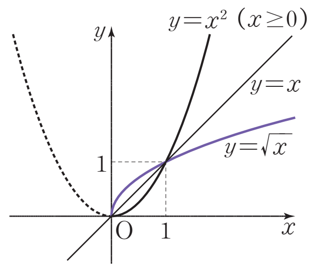
이다.

여기서 x와 y를 서로 바꾸면 역함수

$$y=x^2\ (x\ge 0)$$

을 얻는다.

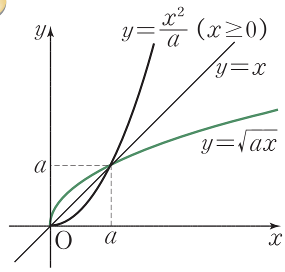
그런데 함수 $y=\sqrt{x}$와 그 역함수 $y=x^2\ (x\ge 0)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=x^2$ $(x\ge 0)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 얻을 수 있다.



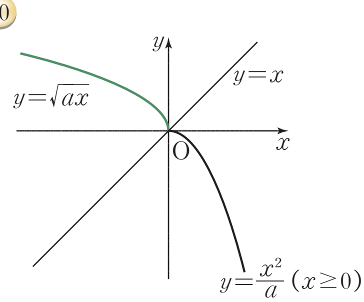
일반적으로 함수 $y=\sqrt{ax}\ (a\ne 0)$는 이차함수 $y=\dfrac{x^2}{a}\ (a\ne 0,\ x\ge 0)$의 역함수이므로 두 함수의 그래프가 $y=x$에 대하여 대칭임을 이용하여 함수 $y=\sqrt{ax}\ (a\ne 0)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.

$y=\sqrt{ax}\ (a\ne 0)$에서 정의역은
$a>0$일 때 $\{x\,|\,x\ge 0\}$
$a<0$일 때 $\{x\,|\,x\le 0\}$
이다.

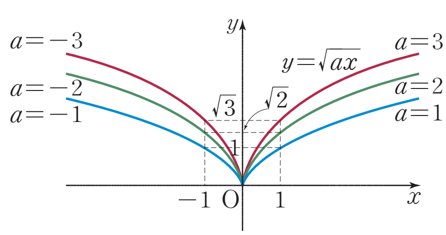
$a>0$



$a<0$



또 함수 $y=\sqrt{ax}\ (a\ne 0)$의 그래프에서 $a=\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3$일 때의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $|a|$의 값이 커질수록 그래프가 x축에서 멀어짐을 알 수 있다.

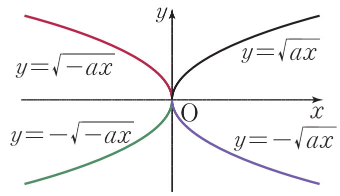


$y=-\sqrt{-ax}\ (a\neq0)$의 그래프는 $y=\sqrt{ax}\ (a\neq0)$의 그래프와 원점에 대하여 대칭이다.

한편 함수 $y=-\sqrt{ax}\ (a\neq0)$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}\ (a\neq0)$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이므로 $a>0$일 때

$$y=\sqrt{ax},\ y=\sqrt{-ax},$$
$$y=-\sqrt{ax},\ y=-\sqrt{-ax}$$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

무리함수 $y=\sqrt{ax}\ (a\neq0)$의 그래프

(1) 정의역은 $a>0$일 때 $\{x\,|\,x\geq0\}$, $a<0$일 때 $\{x\,|\,x\leq0\}$이고,
치역은 $\{y\,|\,y\geq0\}$이다.

(2) $|a|$의 값이 커질수록 그래프가 x축에서 멀어진다.

예제 **02** 역함수의 그래프를 이용하여 무리함수 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 그려라.

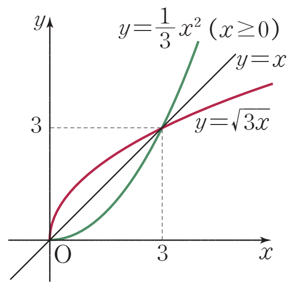
풀이 $y=\sqrt{3x}$를 x에 대하여 정리하면

$$x=\frac{1}{3}y^2\ (y\geq0)$$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는

$$y=\frac{1}{3}x^2\ (x\geq0)$$

함수 $y=\sqrt{3x}$와 그 역함수 $y=\frac{1}{3}x^2\ (x\geq0)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



문제 **4** 다음 무리함수의 그래프를 그리고, 정의역과 치역을 구하여라.

(1) $y=\sqrt{2x}$　　(2) $y=\sqrt{-2x}$

(3) $y=-\sqrt{3x}$　　(4) $y=-\sqrt{-3x}$

무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 어떻게 그리는가?

생각 열기

피사의 사탑

이탈리아의 피사에 세워진 피사의 사탑은 8층으로 설계되어 1173년에 건축을 시작하였지만 3층이 완성되기 전에 탑이 기울기 시작하였다. 많은 노력에도 불구하고 탑을 바로 세우지 못한 채 공사가 지연되다가 14세기가 되어서야 탑이 기울어진 채로 완성되었다. 이 피사의 사탑에서 갈릴레이(Galilei, G. ; 1564∼1642)가 자유 낙하 실험을 했다는 일화가 유명하다.

탐구 활동

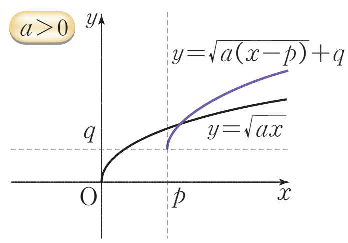
어느 탑의 50 m 높이에서 물체를 자유 낙하시킬 때, t초 후의 높이를 h m라고 하면 $h=-5t^2+50$ $(t\geq 0)$의 관계식이 성립한다고 하자. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 함수 $h=-5t^2+50$ $(t\geq 0)$을 t에 대하여 정리하여 보자.
2. 1에서 나타낸 식을 $t=\sqrt{a(h+b)}$ (a, b는 상수)의 꼴로 변형하여 보자.

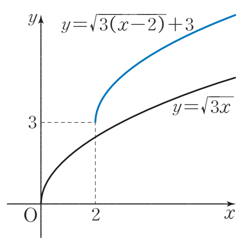
일반적으로 무리함수

$$y=\sqrt{a(x-p)}+q \ (a\neq 0)$$

의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}$ $(a\neq 0)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.



보기 무리함수 $y=\sqrt{3(x-2)}+3$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x|x\geq 2\}$, 치역은 $\{y|y\geq 3\}$이다.



문제 5 다음 무리함수의 그래프를 그리고, 정의역과 치역을 구하여라.

(1) $y=\sqrt{x-2}$　　(2) $y=\sqrt{-(x-1)}+2$

(3) $y=-\sqrt{2(x-1)}-2$　　(4) $y=-\sqrt{-3(x-2)}+1$

무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c\ (a\neq0)$의 그래프는 $y=\sqrt{ax+b}+c$를 $y=\sqrt{a(x-p)}+q\ (a\neq0)$의 꼴로 변형한 다음 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 평행이동하여 그릴 수 있다.

$y=\sqrt{ax+b}+c$를 변형하면

$$y=\sqrt{ax+b}+c=\sqrt{a\left\{x-\left(-\frac{b}{a}\right)\right\}}+c$$

가 된다. 따라서 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

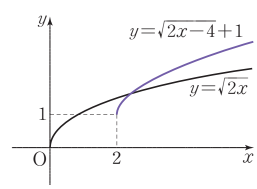
이상을 정리하면 다음과 같다.

무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c\ (a\neq0)$의 그래프

(1) 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{b}{a}$만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다.

(2) 정의역은 $a>0$일 때 $\left\{x \,\middle|\, x\geq-\frac{b}{a}\right\}$, $a<0$일 때 $\left\{x \,\middle|\, x\leq-\frac{b}{a}\right\}$이고, 치역은 $\{y\,|\,y\geq c\}$이다.

보기 무리함수 $y=\sqrt{2x-4}+1=\sqrt{2(x-2)}+1$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 정의역은 $\{x\,|\,x\geq2\}$, 치역은 $\{y\,|\,y\geq1\}$이다.



문제 6 다음 무리함수의 그래프를 그리고, 정의역과 치역을 구하여라.

● $y=-\sqrt{ax+b}+c$의 그래프는 $y=-\sqrt{ax}$의 그래프를 평행이동한 것이다.

(1) $y=\sqrt{2x+6}-1$ (2) $y=\sqrt{-3x+5}+\frac{1}{2}$

(3) $y=-\sqrt{3x+9}-1$ (4) $y=-\sqrt{-2x-4}+1$

실생활

문제 7 바람이 불면 바람이 불지 않을 때보다 더 춥게 느껴지는데, 이렇게 실제로 느껴지는 온도를 체감 온도라고 한다. 기온을 t ℃, 풍속을 v m/s, 복사량을 I kW/m², 체감 온도를 T ℃라고 하면 $T=t-\sqrt{16v}+12I$의 관계식이 성립한다고 하자. 기온이 5 ℃이고 복사량이 $\frac{1}{2}$ kW/m²일 때, 함수 $T=f(v)$의 그래프를 그려라. (단, $v>0$)

● 복사량 I kW/m²는 단위 넓이당 1분 동안 받는 일사량을 칼로리의 값으로 나타낸 것이다.

중단원 기초

1 다음 유리식을 간단히 하여라.

01 유리함수
유리식

(1) $\dfrac{25x^2y^2}{20xy^4}$　　(2) $\dfrac{x^2-5x+4}{(x-1)(x+1)}$

2 유리함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 다음과 같이 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 구하여라.

01 유리함수
유리함수의 그래프

(1) x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 5만큼

(2) x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 -2만큼

3 다음 무리식의 값이 실수가 되도록 x값의 범위를 구하여라.

02 무리함수
무리식

(1) $\sqrt{x+1}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$　　(3) $\sqrt{4-x}+3\sqrt{x-2}$

4 무리함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 다음과 같이 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 구하여라.

02 무리함수
무리함수의 그래프

(1) x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼

(2) x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼

5 다음 함수의 그래프를 그려라.

01 유리함수 02 무리함수
유리함수와 무리함수의 그래프

(1) $y=\dfrac{1}{x-3}$　　(2) $y=\dfrac{1}{x-3}+1$

(3) $y=\sqrt{x+2}$　　(4) $y=\sqrt{x+2}-1$

[해답 p.224]

중단원 기본

수준별 학습

1 다음 함수의 그래프를 그리고, 정의역과 치역을 구하여라. 또 유리함수인 것은 점근선의 방정식을 구하여라.

(1) $y=-\dfrac{3}{x+1}+2$　　(2) $y=\dfrac{3x+4}{x-1}$

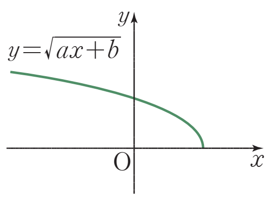
(3) $y=\sqrt{2x-4}-2$　　(4) $y=-\sqrt{-x-1}+2$

01 유리함수 02 무리함수
유리함수와 무리함수의 그래프

2 유리함수 $y=\dfrac{ax+1}{x+b}$의 점근선이 직선 $x=2$, $y=3$일 때, 두 상수 a, b의 값을 구하여라.

01 유리함수
유리함수의 그래프

3 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 두 상수 a, b의 부호를 정하여라.



02 무리함수
무리함수의 그래프

4 두 함수 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, $g(x)=\sqrt{5x-1}$에 대하여 $(g\circ f^{-1})(3)$의 값을 구하여라.

01 유리함수 02 무리함수
유리함수와 무리함수

5 $1\le x\le 3$일 때, 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $y=\dfrac{2}{x+1}$　　(2) $y=-\dfrac{2}{x+2}+1$

(3) $y=\sqrt{2x-1}-2$　　(4) $y=-\sqrt{-x+4}+2$

01 유리함수 02 무리함수
유리함수와 무리함수의 그래프

중단원 실력

1 유리함수 $y=\frac{ax-1}{x+b}$의 그래프가 두 직선 $y=x-2$와 $y=-x+3$에 대하여 모두 대칭일 때, 두 상수 a, b의 값을 구하여라.

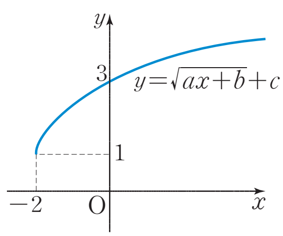
01 유리함수
유리함수의 그래프

2 유리함수 $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq0,\ ad-bc\neq0)$에 대하여 다음 세 조건 p, q, r가 서로 필요충분조건임을 설명하여라.

01 유리함수

p : $f=f^{-1}$ (단, f^{-1}는 f의 역함수이다.)
q : $a=-d$
r : '두 점근선의 교점이 직선 $y=x$ 위에 있다.'

3 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 세 상수 a, b, c의 값을 각각 구하여라.



02 무리함수
무리함수의 그래프

4 무리함수 $f(x)=\sqrt{6x-9}$의 역함수를 $y=f^{-1}(x)$라고 할 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 좌표를 구하여라.

02 무리함수
무리함수의 그래프

5 두 점 A$(2,\ 3)$, B$(3,\ 2)$에 대하여 무리함수 $y=\sqrt{m(x+1)}$ $(m>0)$의 그래프가 선분 AB와 만날 때, 실수 m값의 범위를 구하여라.

02 무리함수
무리함수의 그래프

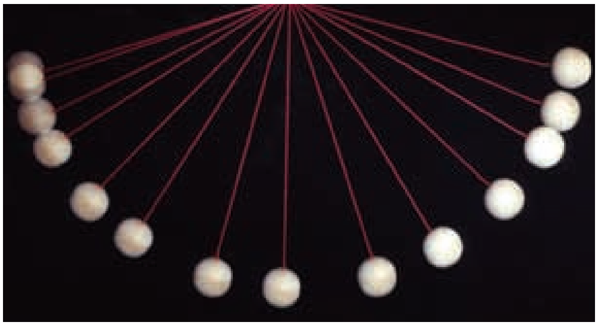
수행 과제

진자의 주기

실의 맨 끝에 작은 추를 달아서 흔들면 일정한 간격으로 추가 진동한다. 이와 같은 장치를 진자라고 하며 추가 한 번 왕복하는 데 걸리는 시간을 주기라고 한다. 진자의 길이를 l m, 중력 가속도를 g m/s^2, 진자의 주기를 T초라고 하면

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

의 관계가 성립한다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.



| 과 제 | **1**  1 m 길이의 진자를 만들어 진자가 10회 왕복한 시간을 조사하여 보고, 이를 이용하여 주기 T의 값을 구하여 보자. 또 T의 값을 이용하여 g의 값을 반올림하여 소수 첫째 자리까지 구하여 보자.

| 과 제 | **2** 오른쪽 그림과 같이 진자의 주기가 일정한 성질을 이용하여 만든 시계를 괘종시계라고 한다. 이 시계의 진자가 60회 왕복할 때마다 긴 시곗바늘이 한 칸씩 움직인다. 이 시계의 진자의 길이를 4배로 늘리면 긴 시곗바늘은 진자의 길이를 늘리기 전보다 몇 배 느리게 움직이는지 설명하여 보자. (단, 긴 시곗바늘이 한 칸 움직이는 시간은 1분이다.)

대단원 학습 내용 정리

1 함수

함수

함수 $f: X \longrightarrow Y$에 대하여 집합 X를 정의역, 집합 Y를 공역, 함숫값 전체의 집합 $\{f(x) \mid x \in X\}$를 치역이라고 한다.

여러 가지 함수

함수 $f: X \longrightarrow Y$에서

(1) 일대일함수: 정의역 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$인 함수

(2) 일대일 대응: 일대일함수 중에서 치역과 공역이 일치하는 함수

(3) 항등함수: $X=Y$이고, 정의역 X의 임의의 원소 x에 대하여 $f(x)=x$인 함수

(4) 상수함수: 정의역 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)=c$ (c는 상수)인 함수

합성함수

(1) 두 함수 $f: X \longrightarrow W$, $g: W \longrightarrow Y$에 대하여 $g \circ f: X \longrightarrow Y$, $(g \circ f)(x)=g(f(x))$

(2) $g \circ f \neq f \circ g$

(3) $h \circ (g \circ f)=(h \circ g) \circ f$

역함수

함수 $f: X \longrightarrow Y$가 일대일 대응이면

(1) 역함수 $f^{-1}: Y \longrightarrow X$가 존재한다.

(2) $y=f(x) \Longleftrightarrow x=f^{-1}(y)$

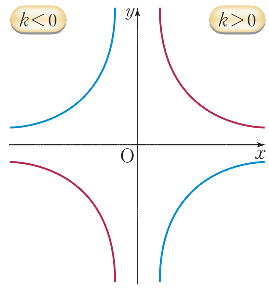
(3) $f^{-1} \circ f$와 $f \circ f^{-1}$는 각각 항등함수이다.

(4) $(f^{-1})^{-1}=f$

(5) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

2 유리함수

유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$ $(k \neq 0)$의 그래프

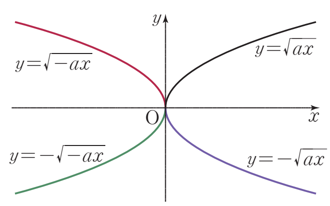


유리함수 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0,\ ad-bc \neq 0)$의 그래프

$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0,\ ad-bc \neq 0)$를 $y=\dfrac{k}{x-p}+q$ $(k \neq 0)$의 꼴로 변형한 후 함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하여 그린다.

3 무리함수

무리함수 $y=\pm\sqrt{ax}$, $y=\pm\sqrt{-ax}$ $(a>0)$의 그래프



무리함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$ $(a \neq 0)$의 그래프

$y=\sqrt{ax+b}+c$ $(a \neq 0)$를 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 꼴로 변형한 후 함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하여 그린다.

용어와 기호 대응, 정의역, 공역, 치역, 일대일함수, 일대일 대응, 항등함수, 상수함수, 합성함수, 역함수, 유리식, 유리함수, 다항함수, 점근선, 무리식, 무리함수, $f: X \longrightarrow Y$, $g \circ f$, $(g \circ f)(x)$, $y=g(f(x))$, f^{-1}, $y=f^{-1}(x)$

대/단/원 평가 문제

선택형

1 두 집합 $X=\{0, 1, 2\}$, $Y=\{1, 2, 3\}$에 대하여 함수 $f: X \longrightarrow Y$가 $f(x)=|2x-1|$로 주어질 때, 치역의 원소의 합은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

2 두 집합 $X=\{x|-2\le x\le 2\}$, $Y=\{y|-4\le y\le 4\}$에 대하여

$$f: X \longrightarrow Y,\ f(x)=ax+b\ (a>0)$$

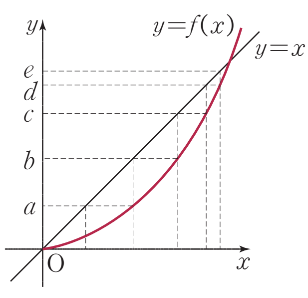
로 정의되는 함수 f가 일대일 대응일 때, $a+b$의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

3 함수 f가 임의의 두 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$를 만족시키고 $f(1)=3$이라고 할 때, $f(3)$의 값은?

① 1　② 3　③ 6　④ 9　⑤ 12

4 함수 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $(f\circ f\circ f)(d)$의 값은? (단, 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)



① a　② b　③ c　④ d　⑤ e

5 함수 $f(x)=2x+a$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$에 대하여 $f^{-1}(3)=1$이다. 이때 $f^{-1}(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

6 함수 $f(x)=-2x+|x|$에 대하여 $f^{-1}(1)+f^{-1}(-1)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{2}{3}$　③ 1　④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2

7 유리함수 $y=\frac{ax-1}{x-b}$의 그래프가 두 직선 $x=3$, $y=2$와 만나지 않을 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

8 함수 $f(x)=\frac{ax}{x-3}$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 상수 a의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

9 무리함수 $f(x)=\sqrt{2x-1}+a$에 대하여 $f^{-1}(4)=5$를 만족시킬 때, 상수 a의 값은?

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

10 $-2\le x\le 1$에서 무리함수 $y=\sqrt{2-x}+a$의 최솟값이 2일 때, 최댓값은?

① $\sqrt{2}+1$　② $\dfrac{5}{2}$　③ 3
④ $\sqrt{2}+2$　⑤ 4

서답형

11 자연수 n에 대하여 함수 f를
$f(n)=(n$의 일의 자리 숫자$)$라고 정의할 때,

$$f(3)+f(3^2)+f(3^3)+\cdots+f(3^{10})$$

의 값을 구하여라.

12 두 집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 함수 $f: X \longrightarrow Y$가 일대일함수일 때,

$$1\cdot f(1)+2\cdot f(2)+3\cdot f(3)$$

의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 하자. 이때 $M+m$의 값을 구하여라.

13 거리가 10 km인 산책로를 처음에는 x km/h의 속력으로 쉬지 않고 걷기로 하였다가 계획했던 속력보다 1 km/h 더 빠르게 걷고 중간에 30분을 쉬었다. 다음 물음에 답하여라.

(1) 10 km를 가는 데 총 y시간이 걸렸을 때, y를 x에 대한 함수로 나타내어라.
(2) $0<x<4$일 때, (1)에서 구한 함수의 그래프를 그려라.

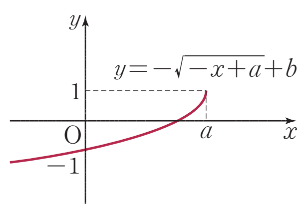
14 함수 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$에 대하여 $f(f(f(10)))$의 값을 구하여라.

|서|술|형|

15 함수 $f(x)=\begin{cases} -x & (x>0\text{일 때}) \\ (a^2-5a)x & (x\le 0\text{일 때}) \end{cases}$가 일대일 대응이 되도록 하는 정수 a의 개수를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

|서|술|형|

16 무리함수 $y=-\sqrt{-x+a}+b$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 두 상수 a, b의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.



수 학 ✚ 문 학

김삿갓 방랑기

미국의 수학자 데이비스(Davis, P. J.)와 미국의 수학자 허시(Hersh, R.)가 지은 “수학적 경험”이라는 책에서는 수학을 다음과 같이 소개하고 있다.

‘수학의 창조자가 느끼는 기쁨과 평화로움 그리고 자신감은 이 세상 어느 것에도 비교할 수 없는 것이다. 또한 위대하고 새로운 수학적 구조는 불멸의 진리이다.’

이와 같이 새로운 것을 만들어 낸다는 것은 매우 큰 기쁨이자 아름다움이다. 이런 이유로 종종 수학과 문학을 같은 부류로 취급하기도 한다.

조선 시대 과거 제도에서는 시가 필수였으며, 선비뿐만 아니라 기생도 시에 능했다. 그중 눈에 띄는 인물로는 방랑 시인 김삿갓으로 잘 알려진 시인 김병연이 있다.

그는 과거 시험에서 자신이 역적으로 몰아 욕을 퍼부은 ‘김익순’이 자신의 조부임을 알고, 그 죄책감에 평생 삿갓을 쓰고 방랑하며 살았다고 한다. 그의 호방하고 재치 있는 시는 우리에게 잘 알려져 있는데 그의 시 중에서 수학과 관련된 세 편의 시를 소개한다.

먼저 무한과 관련된 그의 시를 살펴보자.

물론 그가 무한의 본질을 알고 이 시를 썼는지는 알 수 없으나, 김삿갓의 발상은 신기하게도 칸토어(Cantor, G. ; 1845～1918)의 무한론의 발상과 일치하고 있다.

一峯二峯 三四峯 (일봉이봉 삼사봉)　　하나, 둘, 셋, 네 봉우리
五峯六峯 七八峯 (오봉육봉 칠팔봉)　　다섯, 여섯, 일곱, 여덟 봉우리
須臾更作 千萬峯 (수유갱작 천만봉)　　잠깐 사이에 천만 봉우리로 늘어나더니
九萬長天 都是峯 (구만장천 도시봉)　　온 하늘이 모두 구름 봉우리로다.

구름의 속성상 한 조각의 구름이 무한의 구름이 될 수 있다. 즉, 구름을 소재로 무한을 생각하고 있는 김삿갓의 수학적 재치가 돋보이는 시이다.

다음으로 일대일 대응에 관련된 그의 시를 살펴보자.

이 시는 어떤 사람의 회갑을 축하하는 것으로 만수무강을 기원하는 내용을 담고 있다.

김삿갓은 이 세상의 모든 모래알의 수를 무한으로 보고, 그 개수를 세는 방법을 칸토어가 무한집합의 개념을 만들 때 사용한 '일대일 대응'의 원리를 사용하고 있다.

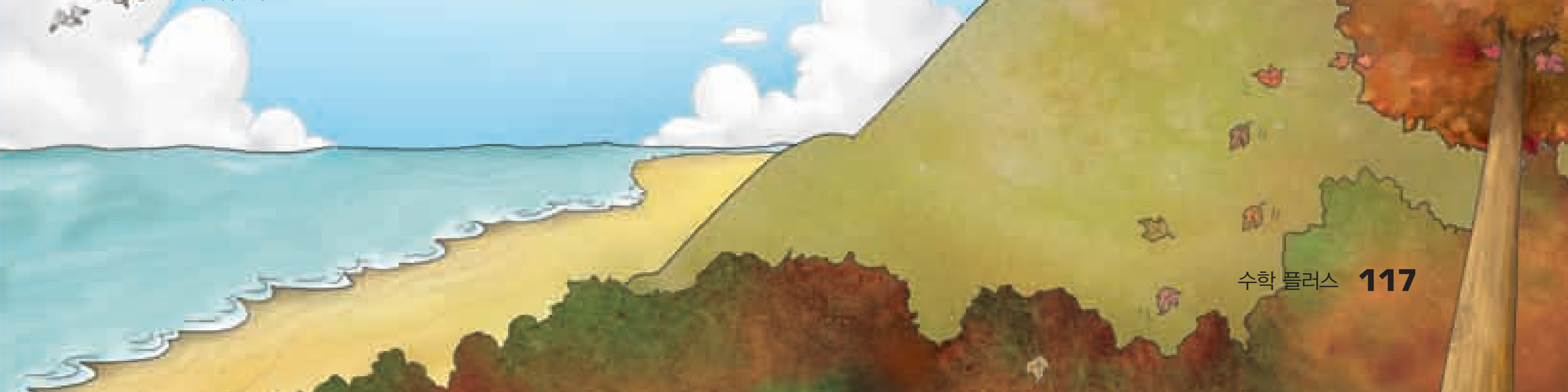
可憐江浦望 (가련강포망)	강에 나와 그 경치를 살펴보니
明沙十里連 (명사십리련)	유리알 같은 모래가 십 리에 걸쳐 있구나.
令人個個捨 (영인개개사)	모래알을 일일이 세어 보니
共數父母年 (공수부모년)	그 수가 부모님의 연세와 같구나.

끝으로 숫자와 관련된 그의 시를 살펴보자.

이 시는 반복적인 기법으로 구월산의 경치를 재미있게 표현한 것이다.

去年九月 過九月(거년구월 과구월)	지난해에도 구월에 구월산에 왔고
今年九月 過九月(금년구월 과구월)	올해에도 구월에 구월산에 왔네.
年年九月 過九月(연년구월 과구월)	해마다 구월에 구월산에 오니
九月山光 長九月(구월산광 장구월)	구월산의 경치는 언제나 구월이로구나.

김삿갓의 시에서는 항상 그 재치와 천재성을 엿볼 수 있는데, 그가 수학적으로도 뛰어났음을 알 수 있다.



M+ Engineering

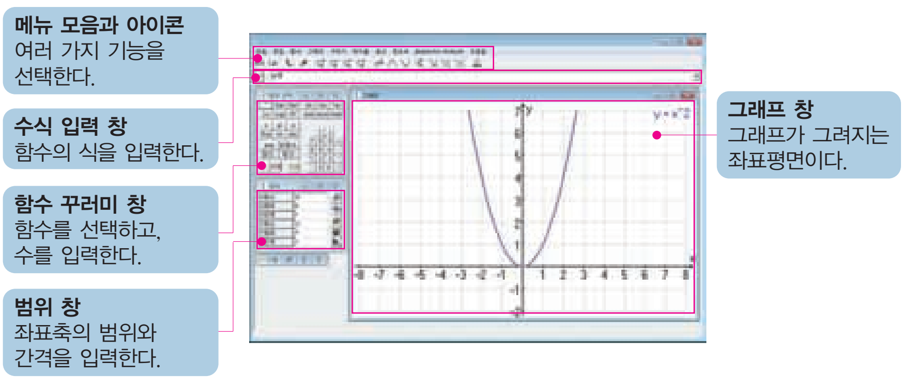
수 학 + 공 학

컴퓨터에 숨어 있는 수학 보물 – 함수의 그래프

함수의 그래프를 그리는 컴퓨터 프로그램을 이용하면 여러 가지 함수의 그래프를 쉽게 그릴 수 있다. 또 그래프의 교점을 이용하면 방정식의 근을 구할 수 있다.

1 \ 소프트웨어의 사용 방법을 알아보자.

예를 들어 다음 그림과 같이 수식 입력 창에 'x^2' 를 입력하고 [Enter↵] 를 누르면 그래프 창에 함수 $y=x^2$의 그래프가 그려진다.



참고 (1) 수식 입력 창에 함수의 식을 입력하는 방법은 다음과 같다.

지수 'x^n' → x^n, 곱셈 → ∗, 나눗셈 → /

정의역 '$\{x\,|\,a\le x\le b\}$' → $[a\,;b]$

(2) 아이콘을 이용하여 여러 가지 기능을 수행한다.

 : 그래프를 그린다.  : 그래프를 지운다.

 : 그래프를 확대한다.  : 그래프를 축소한다.

 : 그래프의 꼭짓점과 교점의 좌표를 구한다.

2\ 두 함수 $y=x^2-2x-3$, $y=-x-1$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

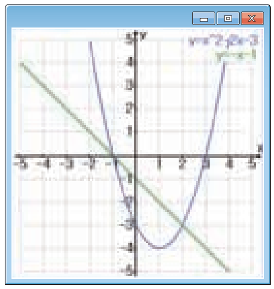
(1) 두 함수의 그래프를 같은 평면 위에 그려 보자.

❶ 함수 꾸러미 창의 버튼이나 컴퓨터 자판을 이용하여 수식 입력 창에 'x^2-2x-3' 을 입력한다.

❷ 를 누르거나 자판에서 Enter 를 누르면 그래프 창에 $y=x^2-2x-3$의 그래프가 그려진다.

❸ 수식 입력 창에 입력된 내용을 지우고 '$-x-1$'을 입력한다.

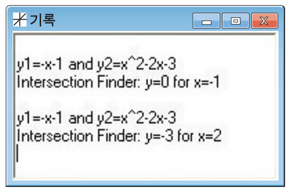
❹ 를 누르거나 자판에서 Enter 를 누르면 오른쪽 그림과 같이 $y=-x-1$의 그래프가 $y=x^2-2x-3$의 그래프와 같은 평면 위에 그려진다.



(2) 두 함수의 그래프의 교점의 좌표를 구하여 보자.

교점의 좌표를 구하는 아이콘 을 누른 다음, 그래프에서 하나의 교점이 포함되도록 마우스를 끌어 영역을 지정하면 왼쪽 아래의 기록 창에 교점의 좌표가 표시된다.

다른 교점도 마찬가지 방법으로 구하면 두 점 $(-1,\ 0)$과 $(2,\ -3)$이 두 그래프의 교점임을 알 수 있다.



3\ 함수의 그래프를 그리는 프로그램을 인터넷으로 찾아서 다음을 연습하여 보자.

(1) 두 함수 $y=x^2-2x+1$, $y=x+1$의 그래프를 같은 평면 위에 그리고, 교점의 좌표를 구하여 보자.

(2) 두 함수 $y=\dfrac{2}{x}$, $y=\dfrac{2}{x-1}+2$의 그래프를 같은 평면 위에 그리고, 두 그래프의 평행이동을 살펴보자.

(3) 두 함수 $y=\sqrt{3x}$, $y=\sqrt{3(x+3)}+1$의 그래프를 같은 평면 위에 그리고, 두 그래프의 평행이동을 살펴보자.

앵무조개의 단면,
식물의 잎이 붙는 순서,
솔방울의 나선 수 등에서 규칙성을 찾을 수 있다.

수열

III

| 준 | 비 | 학 | 습 |

초등 수의 규칙 찾기

1 다음에 나열된 수들이 어떤 규칙을 가지고 있는지 찾아 $\square$ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

(1) $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \square,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ \square,\ 11,\ 12,\ \cdots$

(2) $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \square,\ 13,\ 15,\ \square,\ 19,\ 21,\ \cdots$

(3) $2,\ \square,\ 8,\ -16,\ 32,\ -64,\ \square,\ -256,\ \cdots$

중② 일차함수
중③ 이차함수

2 다음 함수에 대하여 $f(1)$, $f(6)$의 값을 구하여라.

(1) $f(n)=3n-1$

(2) $f(n)=2n^2$

1 등차수열과 등비수열

홍채와 조리개

눈으로 물체를 인식하기 위해서는 적당한 양의 빛이 필요하다. 눈에는 빛의 양을 조절해 주는 홍채가 있는데, 주변이 어두운 곳에서는 눈으로 많은 빛이 들어오게 하기 위하여 홍채의 넓이가 줄어 동공이 커진다. 반대로 주변이 밝은 곳에서는 눈으로 들어오는 빛의 양을 줄이기 위하여 홍채의 넓이가 늘어나 동공이 작아진다.

카메라를 이용하여 사진을 찍을 때에도 빛의 양을 조절하는 것이 중요하다. 카메라에서 홍채의 역할을 하는 것은 조리개인데, 주변의 밝기에 따라 조리개를 열거나 조여 줌으로써 빛의 양을 조절한다. 조리개를 조절할 때, 기준이 되는 것은 F수라고 하는 조리개의 눈금이다. F수는

$$1.4,\ 2,\ 2.8,\ 4,\ 5.6,\ \cdots$$

으로 이 값은 조리개의 열린 부분의 지름에 반비례한다. 즉, F수가 커질수록 조리개가 닫혀 더 적은 양의 빛을 받아들이고 F수가 작아질수록 조리개가 열려 더 많은 양의 빛을 받아들인다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 138쪽

카메라의 F수 $1.4,\ 2,\ 2.8,\ 4,\ 5.6,\ \cdots$에는 어떤 규칙이 있을까?

01 수열의 뜻

● 수열의 뜻을 안다.

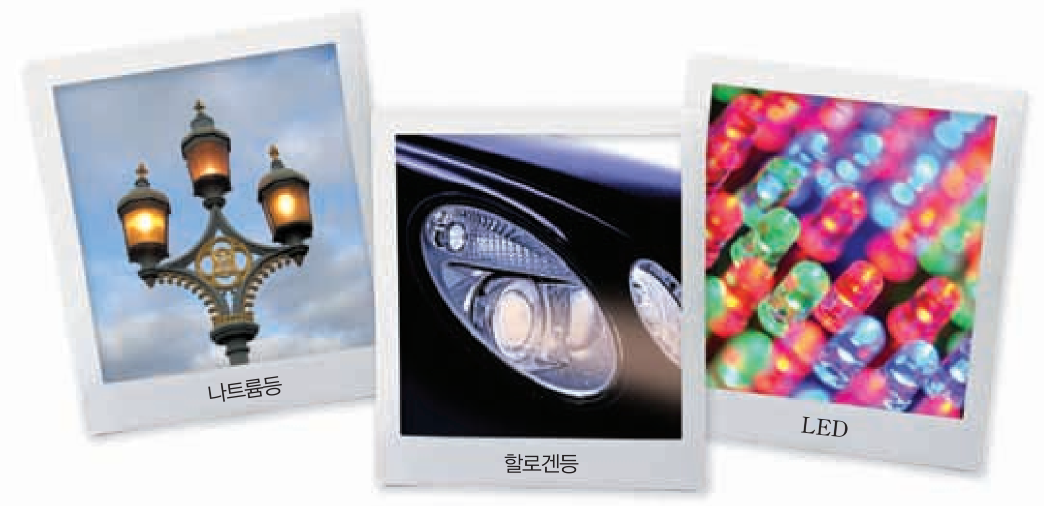
수열이란 무엇인가?

생각 열기

조명

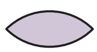
1879년 미국의 에디슨(Edison, T. A. ; 1847～1931)이 발명한 백열전구는 동식물의 기름이나 석유에 불을 붙여 밤을 밝혔던 조명의 역사에 획기적인 변화를 가져왔다. 이후 수은등, 나트륨등, 할로겐등, LED, OLED 등 다양한 조명이 개발되었으며 최근에는 기능성뿐만 아니라 실내 장식에서도 중요한 역할을 하고 있다.

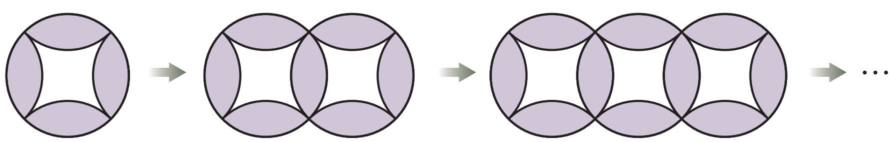
에디슨의 백열전구



나트륨등 할로겐등 LED

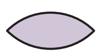
탐구 활동

다음 그림과 같이 조립식 조명  **을 연결하여 조명 장치를 만들 때, 물음에 답하여 보자.**

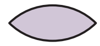


1 단계 2 단계 3 단계

1. 4단계에는 어떤 모양이 되는지 그려 보자.

2. 각 단계에서 사용된 조립식 조명  의 개수를 차례로 나열하여 보자.

3. **2**에서 나열한 수에는 어떤 규칙이 있는지 말하여 보자.

탐구 활동의 각 단계에서 사용된 조립식 조명  의 개수는 다음과 같이 4부터 시작하여 차례로 3씩 늘어난다.

$$4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19,\ 22,\ \cdots$$

이와 같이 차례로 나열된 수의 열을 **수열**이라 하고, 나열된 각 수를 그 수열의 **항**이라고 한다.

● 일정한 규칙 없이 수를 나열한 것도 수열이지만, 여기에서는 규칙성이 있는 수열만 다룬다.

이때 각 항을 앞에서부터 차례로 첫째항, 둘째항, 셋째항, $\cdots$ 또는 제1항, 제2항, 제3항, $\cdots$이라고 한다.

보기 수열 $-4,\ 0,\ 4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ \cdots$에서 첫째항은 -4, 제3항은 4이다.

문제 1 다음 수열의 첫째항과 제5항을 각각 말하여라.

(1) $3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ \cdots$

(2) $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ \cdots$

일반적으로 수열을 나타낼 때에는 각 항의 번호를 붙여

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

과 같이 나타내고, 제n항 $\boldsymbol{a_n}$을 이 수열의 **일반항**이라고 한다.

또 수열 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$은 일반항 a_n을 사용하여

$$\{\boldsymbol{a_n}\}$$

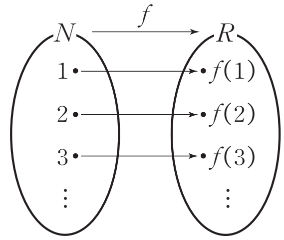
과 같이 간단히 나타낸다.

한편 수열 $\{a_n\}$은 각 항의 번호에 그 항이 대응하는 함수로 생각할 수 있다.

즉, 자연수 전체의 집합 N을 정의역, 실수 전체의 집합 R를 공역으로 하는 함수 $f : N \longrightarrow R$를

$$f(n)=a_n$$

으로 정의하면



$$f(1)=a_1,\ f(2)=a_2,\ f(3)=a_3,\ \cdots$$

이다.

따라서 일반항 a_n이 n에 관한 식 $f(n)$으로 주어지면 n에 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 차례로 대입하여 수열 $\{a_n\}$의 모든 항을 구할 수 있다.

보기 일반항이 $a_n=\sqrt{n}$인 수열 $\{a_n\}$에서

$$a_1=\sqrt{1}=1,\ a_2=\sqrt{2},\ a_3=\sqrt{3},\ a_4=\sqrt{4}=2,\ a_5=\sqrt{5},\ \cdots$$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 다음과 같다.

$$1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ 2,\ \sqrt{5},\ \cdots$$

문제 2 일반항이 다음과 같은 수열의 첫째항부터 제5항까지를 나열하여라.

(1) $a_n=3n-4$ (2) $a_n=(-3)^n$

(3) $a_n=(n+1)^2$ (4) $a_n=\dfrac{1}{n}$

예제 01

다음 수열의 일반항 a_n을 구하여라.

(1) $2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \cdots$ (2) $10,\ 100,\ 1000,\ 10000,\ \cdots$

풀이 (1) $a_1=2=2\times1,\ a_2=4=2\times2,\ a_3=6=2\times3,\ a_4=8=2\times4,\ a_5=10=2\times5,\ \cdots$

이므로 일반항은 $a_n=2n$이다.

(2) $a_1=10=10^1,\ a_2=100=10^2,\ a_3=1000=10^3,\ a_4=10000=10^4,\ \cdots$

이므로 일반항은 $a_n=10^n$이다.

답 (1) $a_n=2n$ (2) $a_n=10^n$

문제 3 다음 수열의 일반항 a_n을 구하여라.

(1) $1,\ 8,\ 27,\ 64,\ \cdots$ (2) $1,\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{5},\ \dfrac{1}{7},\ \cdots$

(3) $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$ (4) $1\cdot2,\ 2\cdot3,\ 3\cdot4,\ 4\cdot5,\ \cdots$

사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

띠동갑인 사람의 나이를 작은 수부터 나열하면 그 수는 12씩 늘어난다. 이와 같이 우리 생활 주변에서 수열로 표현할 수 있는 것에는 어떤 것들이 있는지 말하여 보자.

02 등차수열

● 등차수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

등차수열이란 무엇인가?

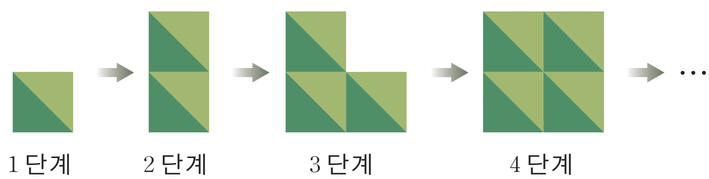
생각 열기

테셀레이션

동일한 모양을 이용해 틈이나 포개짐 없이 평면이나 공간을 완전하게 덮는 것을 테셀레이션이라고 한다. 이는 라틴 어의 정사각형 모양의 돌 또는 타일을 뜻하는 테셀라(tessella)에서 유래된 말로 우리말로는 '쪽매 맞춤' 이라고 한다.

탐구 활동

다음은 삼각형 모양의 타일 ◣ 과 ◥을 이용하여 테셀레이션을 만드는 과정이다. 물음에 답하여 보자.



1. 각 단계에서 사용된 타일 ◣ 과 ◥의 개수의 합을 나열하여 보자.

2. **1**에서 나열한 수에는 어떤 규칙이 있는지 말하여 보자.

수열

$$2, \underbrace{\quad}_{+2} 4, \underbrace{\quad}_{+2} 6, \underbrace{\quad}_{+2} 8, \underbrace{\quad}_{+2} 10, \quad \cdots$$

은 첫째항 2부터 차례로 일정한 수 2를 더하여 얻은 수열이다.

이와 같이 첫째항부터 차례로 일정한 수를 더하여 만들어지는 수열을 **등차수열**이라 하고, 그 일정한 수를 **공차**라고 한다.

따라서 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에서 제n항 a_n과 제$(n+1)$항 a_{n+1} 사이에는

$$a_{n+1}=a_n+d \ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

인 관계가 성립한다.

● 등차수열(等差數列)은 영어로 arithmetic sequence, 공차(公差)는 영어로 common difference라고 한다.

● $a_{n+1}-a_n=d$

보기 (1) 수열 $-2, 1, 4, 7, 10, \cdots$은 첫째항이 -2, 공차가 3인 등차수열이다.

(2) 수열 $2, 1, 0, -1, -2, \cdots$는 첫째항이 2, 공차가 -1인 등차수열이다.

문제 1 다음 수열 중에서 등차수열인 것을 찾고, 등차수열인 것은 공차를 구하여라.

(1) $4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ \cdots$

(2) $9,\ 3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \cdots$

(3) $\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{7}{8},\ -\frac{10}{8},\ \cdots$

(4) $1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 11,\ \cdots$

이제 등차수열의 일반항을 구하여 보자.

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에서

$$a_1=a=a+0d$$
$$a_2=a_1+d=a+1d$$
$$a_3=a_2+d=(a+d)+d=a+2d$$
$$a_4=a_3+d=(a+2d)+d=a+3d$$
$$\vdots$$

이므로 일반항 a_n은

$$a_n=a+(n-1)d$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

등차수열의 일반항

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은

$$a_n=a+(n-1)d\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

보기 (1) 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열의 일반항 a_n은

$$a_n=1+(n-1)\times 3=3n-2$$

(2) 수열 $7,\ 4,\ 1,\ -2,\ -5,\ \cdots$는 첫째항이 7, 공차가 -3인 등차수열이므로 일반항 a_n은

$$a_n=7+(n-1)\times(-3)=-3n+10$$

문제 2 다음 등차수열의 일반항 a_n을 구하여라.

공차가 주어지지 않은 경우에는 먼저 공차를 구한다.

(1) 첫째항이 2, 공차가 3

(2) 첫째항이 3, 공차가 -4

(3) $-1,\ 4,\ 9,\ 14,\ 19,\ \cdots$

(4) $1,\ -1,\ -3,\ -5,\ -7,\ \cdots$

문제 3 첫째항이 50, 공차가 -4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 제10항을 구하여라.

(2) -26은 제 몇 항인가?

예제 **01** 제4항이 13, 제10항이 37인 등차수열의 일반항 a_n을 구하여라.

풀이 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라고 하면

$$a_4=a+(4-1)d$$
$$=a+3d=13 \quad \cdots\cdots ①$$
$$a_{10}=a+(10-1)d$$
$$=a+9d=37 \quad \cdots\cdots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=1,\ d=4$

따라서 구하는 일반항 a_n은 $a_n=1+(n-1)\times4=4n-3$이다.

답 $a_n=4n-3$

문제 **4** 다음 등차수열의 일반항 a_n을 구하여라.

(1) $a_2=8,\ a_5=-1$ (2) $a_3=5,\ a_9=17$

예제 **02** 등차수열 $-72,\ -68,\ -64,\ \cdots$에서 처음으로 양수가 되는 항은 제 몇 항인지 구하여라.

풀이 주어진 수열의 일반항을 a_n이라고 하면 첫째항이 -72, 공차가 4이므로

$$a_n=-72+(n-1)\times4=4n-76$$

$a_n>0$에서 $4n-76>0,\ n>19$

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제20항이다.

답 제20항

문제 **5** 다음 물음에 답하여라.

(1) 공차가 -5, 제10항이 36인 등차수열에서 처음으로 음수가 되는 항은 제 몇 항인지 구하여라.

(2) 제3항이 3, 제10항이 24인 등차수열에서 처음으로 200보다 크게 되는 항은 제 몇 항인지 구하여라.

발전 문제 **6** 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n이 n에 관한 일차식 $pn+q$ (p, q는 상수)일 때, 수열 $\{a_n\}$은 등차수열임을 보이고, 이 수열의 첫째항과 공차를 구하여라.

한편 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b를 a와 c의 **등차중항**이라고 한다. 이때 b가 a와 c의 등차중항이면 $b-a=c-b$이므로 $b=\frac{a+c}{2}$이다.

역으로 $b=\frac{a+c}{2}$이면 $b-a=c-b$이므로 b는 a와 c의 등차중항이다.

즉, b가 a와 c의 등차중항이기 위한 필요충분조건은

$$b=\frac{a+c}{2}$$

이다.

b가 a와 c의 등차중항일 때, $b=\frac{a+c}{2}$이므로 b는 a와 c의 산술평균이다.

보기 세 수 2, x, 8이 이 순서대로 등차수열을 이루면 x는 2와 8의 등차중항이므로

$$x=\frac{2+8}{2}=5$$

문제 7 다음 수열이 등차수열이 되도록 두 상수 a, b의 값을 구하여라.

(1) $2,\ a,\ 14,\ b,\ \cdots$

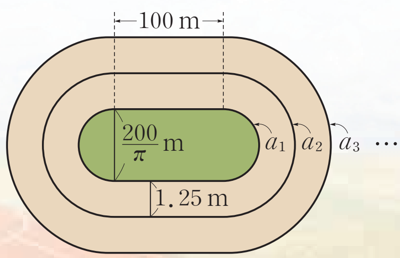
(2) $a,\ -3,\ b,\ -17,\ \cdots$

발전

문제 8 두 수 8과 23 사이에 네 수를 넣어 전체가 등차수열이 되도록 할 때, 이 네 수를 순서대로 구하여라.

창의 up

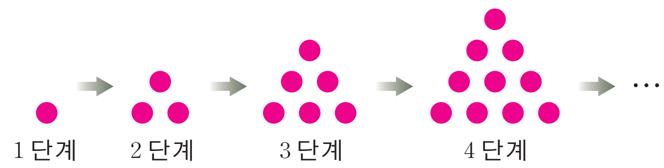
오른쪽 그림과 같이 직선 주로와 반원 모양의 곡선 주로로 이루어진 육상 경기장이 있다. 이 경기장의 레인은 총 8개로 각각의 폭은 1.25 m이다. 각 레인의 안쪽 경계선을 차례로 a_1, a_2, $\cdots$, a_8이라고 할 때, a_8의 길이를 구하여라. (단, 모든 경계선은 반원 2개와 100 m의 선분 2개로 이루어져 있다.)



등차수열의 합을 어떻게 구하는가?

탐구 활동

다음 그림과 같이 정삼각형 모양으로 스티커를 붙여 나갈 때, 사용된 스티커의 개수 1, 3, 6, 10, …을 삼각수라고 한다. 이와 같은 방법으로 계속해서 스티커를 붙여 나간다고 할 때, 물음에 답하여 보자.



1. 4단계에서 스티커를 몇 개 더 붙여야 5단계가 되는가?

2. 5단계에서 스티커를 몇 개 더 붙여야 6단계가 되는가?

3. 10단계의 스티커의 개수를 구하는 방법에 대하여 말하여 보자.

등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하여 보자.

> 수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제n항까지의 합
> $a_1+a_2+\cdots+a_n$
> 을 기호로 나타낼 때에는 보통 S_n을 이용하여
> $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$
> 과 같이 나타낸다.

첫째항이 a, 공차가 d이고 제n항이 l인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-2d)+(l-d)+l \qquad \cdots\cdots ①$$

이고, ①에서 우변의 각 항을 역순으로 나타내면

$$S_n=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+2d)+(a+d)+a \qquad \cdots\cdots ②$$

이다.

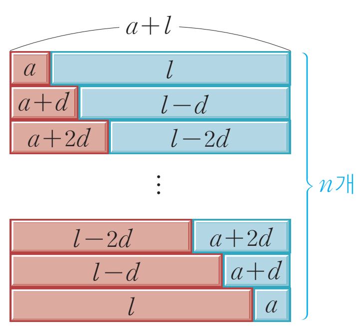
①, ②를 변끼리 더하면

$$2S_n=\underbrace{(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)+(a+l)}_{n\text{개}}=n(a+l)$$

이므로

$$S_n=\frac{n(a+l)}{2} \qquad \cdots\cdots ③$$

이다.



한편 $l=a+(n-1)d$이므로 이것을 ③에 대입하여 정리하면

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

등차수열의 합

등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은

(1) 첫째항이 a, 제n항이 l일 때, $\dfrac{n(a+l)}{2}$

(2) 첫째항이 a, 공차가 d일 때, $\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

보기 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{10\{2\times2+(10-1)\times3\}}{2}=155$$

문제 9 다음 물음에 답하여라.

(1) 첫째항이 -3, 제10항이 15인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합을 구하여라.

(2) 첫째항이 8, 공차가 -2인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합을 구하여라.

(3) 등차수열의 합 $2+4+6+8+\cdots+200$을 구하여라.

(4) 등차수열의 합 $-7+(-10)+(-13)+(-16)+\cdots+(-52)$를 구하여라.

발전

문제 10 첫째항부터 제10항까지의 합이 -155, 첫째항부터 제15항까지의 합이 -120인 등차수열에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 첫째항부터 제20항까지의 합

(2) 첫째항부터 제n항까지의 합이 최소가 되도록 하는 n의 값

이제 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 알아보자.

수열 $\{a_n\}$의 첫째항 a_1부터 제n항 a_n까지의 합을 S_n이라고 하면

$n=1$일 때, $S_1=a_1$

$n\geq2$일 때, $S_2=a_1+a_2=S_1+a_2$

$S_3=a_1+a_2+a_3=S_2+a_3$

$\vdots$

$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n=S_{n-1}+a_n$

이므로

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$

이다.

$\overbrace{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}^{S_{n-1}}+a_n$, $\underbrace{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n}_{S_n}$

첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 주어지면 일반항 a_n을 구할 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

수열의 합과 일반항 사이의 관계는 등차수열뿐만 아니라 모든 수열에서 성립한다.

수열의 합과 일반항 사이의 관계

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$a_1=S_1,\ a_n=S_n-S_{n-1}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

예제 03 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2-3n$일 때, 일반항 a_n을 구하고, 수열 $\{a_n\}$은 등차수열임을 보여라.

풀이 $n=1$일 때, $a_1=S_1=1^2-3\times1=-2$ ⋯⋯ ①

$n\geq2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-3n)-\{(n-1)^2-3(n-1)\}=2n-4$ ⋯⋯ ②

②에 $n=1$을 대입하면 ①과 같으므로 이 수열의 일반항 a_n은 $a_n=2n-4$이다.

이때 $a_{n+1}-a_n=2$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -2, 공차가 2인 등차수열이다.

문제 11 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=2n^2+3n$일 때, 일반항 a_n을 구하고, 수열 $\{a_n\}$은 등차수열임을 보여라.

발전

문제 12 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2-n-1$일 때, 일반항 a_n을 구하여라.

창의 up

다음은 프랑스의 수학자 드무아브르(de Moivre, A. ; 1667~1754)의 일화이다.

> 어느 날 드무아브르는 자신의 수면 시간이 매일 15분씩 길어진다는 것을 발견하였다. 그는 수면 시간이 24시간이 되는 날을 계산하고, 그날에 자신이 죽을 것이라고 예측하였는데 놀랍게도 그 날짜에 생을 마쳤다고 한다.

드무아브르는 매일 밤 12시에 잠이 들고, 어느 날의 수면 시간이 10시간이라고 할 때, 그날부터 생을 마칠 때까지 깨어 있는 시간의 합을 구하여라.

03

등비수열

● 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

등비수열이란 무엇인가?

생각 열기

이성계와 명주실

무학 대사는 이성계가 어느 정도의 인물인지를 알아보고자 이성계에게 질문하였다.

“명주실 한 가닥을 반으로 접어 두 가닥이 되도록 하고, 다시 반을 접어 네 가닥이 되도록 할 때, 같은 방법으로 30번 접으면 굵기는 얼마가 되겠습니까?”

그러자 이성계는 한 기둥을 가리키며

“저 기둥 정도가 될 것 같습니다.”

라고 하였다. 당시 이성계가 가리킨 기둥은 명주실을 약 27번 접은 굵기였다고 한다.

탐구 활동

생각 열기의 명주실에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 다음 표는 명주실을 접는 횟수에 따른 명주실의 가닥수를 나타낸 것이다. 표를 완성하여 보자.

접는 횟수	1	2	3	4	5	6	7
가닥수	2	4	8				

2. **1**의 표에서 명주실의 가닥수를 차례로 나열하고, 어떤 규칙이 있는지 말하여 보자.

수열

$$2,\ \xrightarrow{\times 2}\ 4,\ \xrightarrow{\times 2}\ 8,\ \xrightarrow{\times 2}\ 16,\ \xrightarrow{\times 2}\ 32,\ \quad \cdots$$

는 첫째항 2부터 차례로 일정한 수 2를 곱하여 얻은 수열이다.

이와 같이 첫째항부터 차례로 일정한 수를 곱하여 만들어지는 수열을 **등비수열**이라 하고, 그 일정한 수를 **공비**라고 한다.

따라서 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에서 제n항 a_n과 제$(n+1)$항 a_{n+1} 사이에는

$$a_{n+1}=ra_n \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

인 관계가 성립한다.

● 등비수열(等比數列)은 영어로 geometric sequence, 공비(公比)는 영어로 common ratio라고 한다.

● $\frac{a_{n+1}}{a_n}=r \ (a_n \neq 0)$

보기 (1) 수열 $2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162,\ \cdots$는 첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열이다.

(2) 수열 $1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$은 첫째항이 1, 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

문제 1 다음 수열 중에서 등비수열인 것을 찾고, 등비수열인 것은 공비를 구하여라.

(1) $2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \cdots$

(2) $18,\ 6,\ 2,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{9},\ \cdots$

(3) $1,\ -2,\ 4,\ -8,\ 16,\ \cdots$

(4) $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \cdots$

이제 등비수열의 일반항을 구하여 보자.

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에서

$$a_1=a$$
$$a_2=a_1r=ar^1$$
$$a_3=a_2r=(ar)r=ar^2$$
$$a_4=a_3r=(ar^2)r=ar^3$$
$$\vdots$$

이므로 일반항 a_n은

$$a_1=a,\ a_n=ar^{n-1}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

등비수열의 일반항

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 일반항 a_n은

$$a_1=a,\ a_n=ar^{n-1}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

보기 (1) 첫째항이 5, 공비가 -2인 등비수열의 일반항 a_n은

$$a_1=5,\ a_n=5\cdot(-2)^{n-1}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

(2) 수열 $-2,\ 2,\ -2,\ 2,\ \cdots$는 첫째항이 -2, 공비가 -1인 등비수열이므로 일반항 a_n은

$$a_1=-2,\ a_n=-2\cdot(-1)^{n-1}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

문제 2 다음 등비수열의 일반항 a_n을 구하여라.

(1) 첫째항이 -2, 공비가 3

(2) 첫째항이 12, 공비가 $-\frac{1}{3}$

(3) $\frac{1}{8},\ \frac{1}{2},\ 2,\ 8,\ 32,\ \cdots$

(4) $1,\ -2,\ 4,\ -8,\ 16,\ \cdots$

예제 01 제2항이 15, 제5항이 405인 등비수열의 일반항 a_n을 구하여라.

풀이 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라고 하면

$$a_2=ar^{2-1}=ar=15 \quad \cdots\cdots①$$
$$a_5=ar^{5-1}=ar^4=405 \quad \cdots\cdots②$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=5$, $r=3$

따라서 구하는 일반항 a_n은 $a_1=5$, $a_n=5\cdot 3^{n-1}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$이다.

답 $a_1=5$, $a_n=5\cdot 3^{n-1}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$

● ②÷①에서 $r^3=27$, $r=3$

문제 3 다음 등비수열의 일반항 a_n을 구하여라.

(1) $a_3=24$, $a_6=192$ (2) $a_2=-6$, $a_5=162$

문제 4 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이고 $a_3=1$, $a_6=\frac{1}{8}$일 때, $\frac{1}{256}$은 제 몇 항인지 구하여라.

한편 0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b를 a와 c의 **등비중항**이라고 한다. 이때 b가 a와 c의 등비중항이면 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$이므로 $b^2=ac$이다.

역으로 $b^2=ac$이면 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$이므로 b는 a와 c의 등비중항이다.

즉, b가 a와 c의 등비중항이기 위한 필요충분조건은

$$b^2=ac$$

이다.

● b가 a와 c의 등비중항일 때, $b^2=ac$에서 $b=\pm\sqrt{ac}$이다. 특히 $b=\sqrt{ac}$일 때, b는 a와 c의 기하평균이다.

보기 세 수 -8, x, -2가 이 순서대로 등비수열을 이루면 x는 -8과 -2의 등비중항이므로

$$x^2=(-8)\times(-2)=16,\ x=\pm 4$$

문제 5 다음 수열이 등비수열이 되도록 두 상수 a, b의 값을 구하여라.

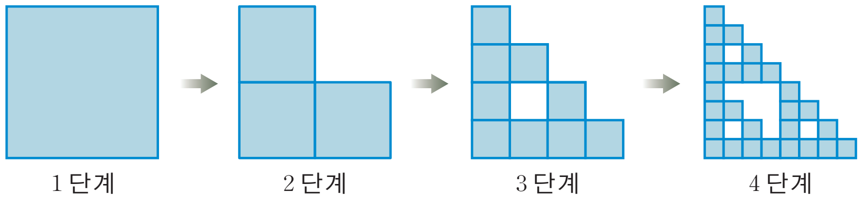
(1) -3, a, -48, b, $\cdots$ (2) a, 28, b, 7$\cdots$

발전

문제 6 두 수 -162와 $\frac{2}{3}$ 사이에 네 수를 넣어 전체가 등비수열이 되도록 할 때, 이 네 수를 순서대로 구하여라.

등비수열의 합을 어떻게 구하는가?

탐구 활동 다음 그림과 같이 색종이에 나타난 모든 정사각형에 4등분하는 선을 그리고 오른쪽 위에 생긴 정사각형을 오려 내는 과정을 반복하였다. 물음에 답하여 보자.



1. 1단계부터 4단계까지 각 단계에 남아 있는 정사각형의 개수를 나열하여 보자.

2. **1**에서 나열한 수의 합을 S라고 할 때, 다음은 S의 값을 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 수를 써넣어 보자.

$$\begin{array}{rl} \square S= & \quad\; 3+3^2+3^3+3^4 \\ -\big)\quad S= & 1+3+3^2+3^3 \\ \hline 2S= & 3^4-1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad S=\square$$

등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하여 보자.

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1} \qquad \cdots\cdots ①$$

이고, ①의 양변에 r를 곱하면

$$rS_n=ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}+ar^n \qquad \cdots\cdots ②$$

이다.

①에서 ②를 변끼리 빼면

$$(1-r)S_n=a-ar^n=a(1-r^n)$$

이므로 S_n은 다음과 같다.

$r\neq1$일 때, $\quad S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r=1$일 때, ①에서 $\quad S_n=\underbrace{a+a+a+\cdots+a}_{n\text{개}}=na$

$r>1$일 때에는 $S_n=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$, $r<1$일 때에는 $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$을 이용하면 편리하다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은

(1) $r\neq1$일 때, $\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

(2) $r=1$일 때, na

보기 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{1\cdot(2^{10}-1)}{2-1}=2^{10}-1=1023$$

문제 7 다음 물음에 답하여라.

(1) 첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합을 구하여라.

(2) 첫째항이 3, 공비가 $-\dfrac{1}{2}$인 등비수열의 첫째항부터 제20항까지의 합을 구하여라.

(3) 등비수열의 합 $2+(-4)+8+(-16)+\cdots+(-1024)$를 구하여라.

(4) 등비수열의 합 $2+2\sqrt{2}+4+4\sqrt{2}+\cdots+16\sqrt{2}$를 구하여라.

발전

문제 8 첫째항부터 제4항까지의 합이 40, 첫째항부터 제8항까지의 합이 3280인 등비수열의 공비가 양수일 때, 첫째항부터 제10항까지의 합을 구하여라.

예제 02 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=3\cdot2^n-3$일 때, 일반항 a_n을 구하고, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열임을 보여라.

풀이 $n=1$일 때, $a_1=S_1=3\cdot2^1-3=3$

$n\geq2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}=(3\cdot2^n-3)-(3\cdot2^{n-1}-3)=3\cdot2^{n-1}$

따라서 이 수열의 일반항 a_n은 $a_1=3$, $a_n=3\cdot2^{n-1}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$이다.

이때 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이다.

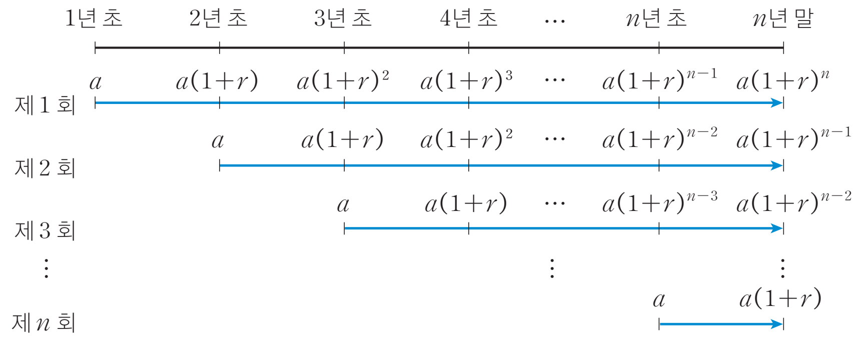
문제 9 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$일 때, 일반항 a_n을 구하고, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열임을 보여라.

등비수열의 합을 이용하여 적립금의 원리합계와 같은 실생활 문제를 해결하여 보자.

예제 03 연이율이 r이고 1년마다 복리로 매년 초에 a원씩 적립할 때, n년째 연말의 원리합계를 구하여라.

원리합계는 원금과 이자를 합한 금액이고, 복리법은 이자를 원금에 가산하여 그 합계액을 다음 기간의 원금으로 하는 이자 계산 방법이다.

풀이 n년째 연말까지 매년 초에 a원씩 적립한 금액의 원리합계는 다음과 같다.



원리합계의 총합을 S_n이라고 하면

$$S_n=a(1+r)+a(1+r)^2+a(1+r)^3+\cdots+a(1+r)^n$$

이것은 첫째항이 $a(1+r)$, 공비가 $1+r$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$S_n=\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{(1+r)-1}=\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}\text{(원)}$$

답 $\frac{a(1+r)\{(1+r)^n-1\}}{r}$원

문제 10 연이율이 8 %이고 1년마다 복리로 매년 초에 10만 원씩 적립할 때, 10년째 연말의 원리합계를 구하여라. (단, $1.08^{10}=2.16$으로 계산한다.)

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

카메라의 F수 1.4, 2, 2.8, 4, 5.6, $\cdots$은

$$\sqrt{2},\ 2,\ 2\sqrt{2},\ 4,\ 4\sqrt{2},\ \cdots \qquad \cdots\cdots ①$$

에서 $\sqrt{2}$를 1.4로 계산한 것이다. 수열 ①을 $\{a_n\}$이라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 일반항 a_n을 구하여라.

(2) $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}$의 값을 구하여라.

[해답 p.227]

중단원 기초

1 다음 수열의 일반항 a_n과 제10항을 구하여라.

(1) $3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots$ (2) $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$

(3) $-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ \cdots$ (4) $2\cdot4,\ 3\cdot5,\ 4\cdot6,\ 5\cdot7,\ \cdots$

01 수열의 뜻
일반항

2 다음 중에서 등차수열과 등비수열을 각각 찾아라.

ㄱ $-9,\ -4,\ 1,\ 6,\ 11,\ \cdots$ ㄴ $-1,\ 3,\ -5,\ 7,\ -9,\ \cdots$
ㄷ $24,\ 12,\ 6,\ 3,\ \frac{3}{2},\ \cdots$ ㄹ $1,\ -3,\ -7,\ -11,\ -15,\ \cdots$
ㅁ $2,\ -4,\ 8,\ -16,\ 32,\ \cdots$ ㅂ $1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7},\ \frac{1}{9},\ \cdots$

02 등차수열 03 등비수열

3 다음 수열의 일반항 a_n과 제20항을 구하여라.

(1) $5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \cdots$ (2) $15,\ 13,\ 11,\ 9,\ \cdots$

(3) $-3,\ -\frac{3}{2},\ -\frac{3}{4},\ -\frac{3}{8},\ \cdots$ (4) $1,\ 5,\ 25,\ 125,\ \cdots$

02 등차수열 03 등비수열
등차수열과 등비수열의 일반항

4 다음을 구하여라.

(1) 첫째항이 15, 공차가 -3인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합

(2) 첫째항이 -3, 공비가 4인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합

02 등차수열 03 등비수열
등차수열과 등비수열의 합

5 다음은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=2n^2-n$일 때, 일반항 a_n을 구하는 과정이다. $\square$ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$n=1$일 때, $a_1=S_1=\square$ ······ ①
$n\geq2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}$
$=2n^2-n-\{2(\square)^2-(\square)\}$
$=\square$ ······ ②
②에 $n=1$을 대입하면 ①과 같으므로 일반항 a_n은 $a_n=\square$이다.

02 등차수열
수열의 합과 일반항 사이의 관계

[해답 p.227]

중단원 기본

수준별 학습

1 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이고 $a_2+a_5=26$, $a_{13}+a_{16}=114$일 때, a_{20}의 값을 구하여라.

02 등차수열
등차수열의 일반항

2 다음 합을 구하여라.

(1) $9+11+13+\cdots+27$

(2) $15+11+7+\cdots+(-9)$

(3) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{1024}$

(4) $3+(-6)+12+\cdots+(-384)$

02 등차수열 03 등비수열
등차수열과 등비수열의 합

3 다음을 구하여라.

(1) 첫째항부터 제5항까지의 합이 10, 첫째항부터 제10항까지의 합이 195인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합

(2) 첫째항부터 제3항까지의 합이 -9, 첫째항부터 제6항까지의 합이 63인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합

02 등차수열 03 등비수열
등차수열과 등비수열의 합

4 두 수 5와 180 사이에 세 수를 넣어 전체가 등비수열이 되도록 할 때, 이 세 수를 순서대로 구하여라.

03 등비수열
등비중항

5 연이율이 10 %이고 1년마다 복리로 매년 초에 5만 원씩 적립할 때, 20년째 연말의 원리합계를 구하여라. (단, $1.1^{20}=6.7$로 계산한다.)

03 등비수열
원리합계

[해답 p.228]

중단원 실력

수준별 학습

1 오른쪽 표에서 모든 가로줄과 세로줄이 각각 등차수열을 이룰 때, ㉠, ㉡에 들어갈 알맞은 수를 구하여라.

1	2				
		㉠			
			㉡		
-7					
					21

02 등차수열

2 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 n에 관한 이차식 pn^2+qn+r (p, q, r는 상수)일 때, 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이기 위한 필요충분조건을 구하여라.

02 등차수열
수열의 합과 일반항 사이의 관계

3 수열 1, 11, 111, 1111, $\cdots$의 일반항 a_n을 구하여라.

03 등비수열
등비수열의 합

4 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n에 대하여 세 수 S_5, $S_{10}-S_5$, $S_{15}-S_{10}$은 이 순서대로 어떤 수열을 이루는지 말하여라.

03 등비수열

5 은행에서 2014년 초에 1500만 원을 빌리고 그해 말부터 15년 동안 갚아 나가려고 한다. 매년 전년도보다 1 %씩 많은 돈을 갚기로 한다면 2014년 말에 갚는 돈은 얼마인지 구하여라. (단, 연이율이 1 %이고 1년마다 복리로 계산한다.)

03 등비수열
원리합계

2

수열의 합

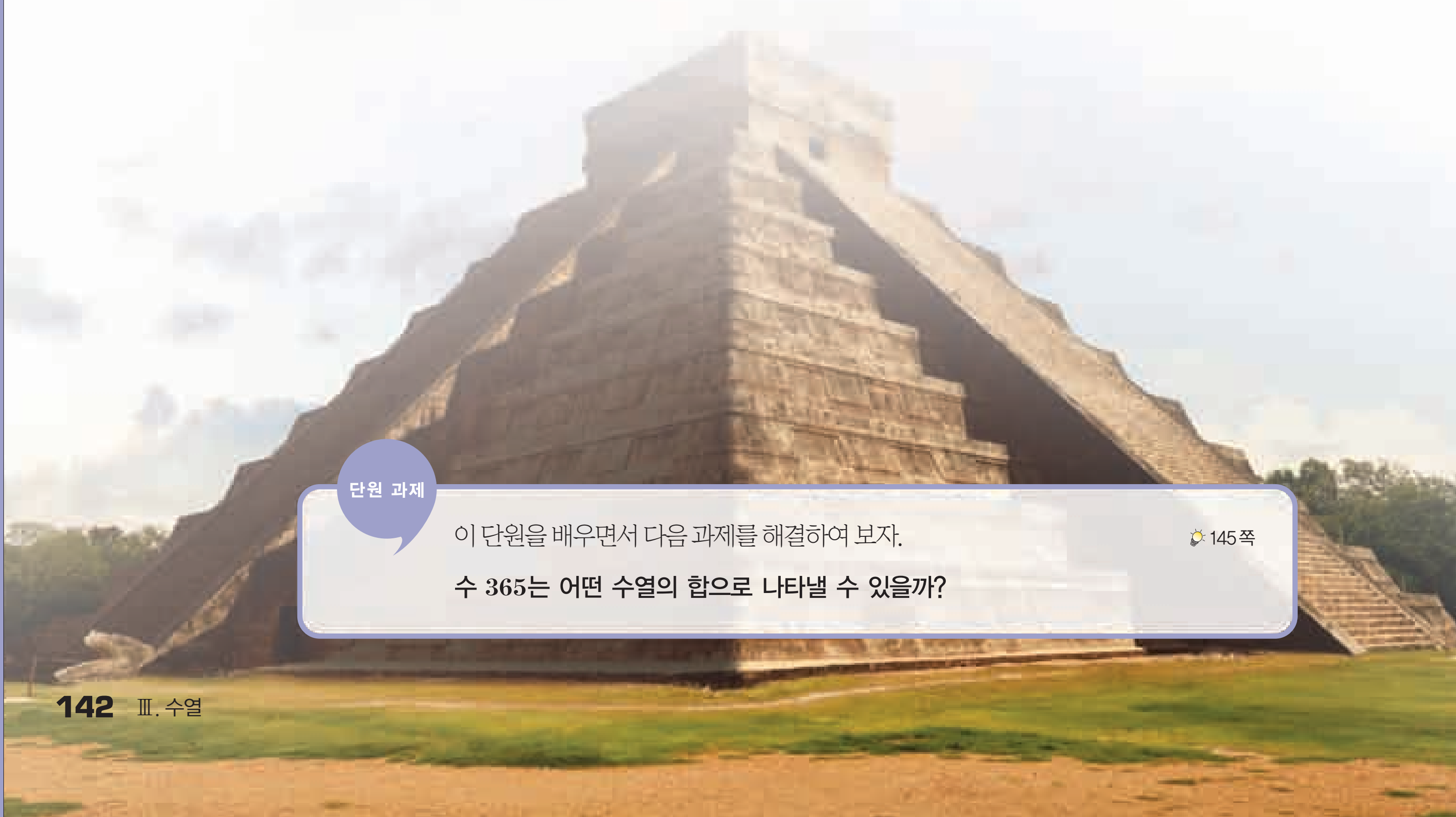
엘 카스티요와 수 365

멕시코 마야 문명의 중심 도시 치첸이트사는 10～13세기에 번성하고 15세기 무렵 폐허가 되어 지금은 유적지가 되었다. 치첸이트사에는 엘 카스티요라고 불리는 피라미드가 있는데, 이 피라미드에는 몇 가지 흥미로운 특징이 있다.

먼저 춘분날과 추분날에 이 피라미드의 북쪽 계단에서는 마치 살아 있는 뱀이 위에서 아래로 내려오는 것 같은 모습을 볼 수 있다. 아래에 있는 뱀 머리 조각과 계단 벽의 그림자가 함께 어우러져 일어나는 현상이다. 평상시에 보면 북쪽 계단 아래에 입을 딱 벌린 뱀 두 마리의 머리가 조각되어 있지만 몸통은 보이지가 않는다.

또한 엘 카스티요의 네 옆면에는 각각 91단의 계단이 있는데 이 계단의 수에도 의미가 있다. 네 면의 계단과 가장 위에 있는 한 단을 포함하여 총 계단의 수를 구하면 $91\times4+1=365$(단)으로, 이는 1년간의 일수 365일을 상징한다.

365일을 기준으로 해가 바뀌고 우리의 생활도 이를 주기로 변하기 때문에 수 365는 친숙하고 의미 있는 수로 여겨지고 있다. 수 365에는 수학적으로도 재미있는 성질이 있다.



단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자.

145쪽

수 365는 어떤 수열의 합으로 나타낼 수 있을까?

01 $\sum$의 뜻과 성질

● $\sum$의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

기호 $\sum$의 의미는 무엇인가?

생각 열기

수학 기호의 편리성

방정식 $x^2=2$의 한 근인 무리수 $1.414213562\cdots$는 $\sqrt{\ }$를 이용하여 $\sqrt{2}$로 나타낼 수 있고, 1 이상 1000 이하의 실수를 원소로 하는 집합은 $\{x|1\le x\le 1000\}$으로 나타낼 수 있다. 이와 마찬가지로 수열의 합 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$도 기호를 이용하여 간단히 나타내면 편리하다.

탐구 활동

다음 물음에 답하여 보자.

1. 어떤 수 a를 10번 더한 $a+a+a+a+a+a+a+a+a+a$를 간단히 나타내어 보자.

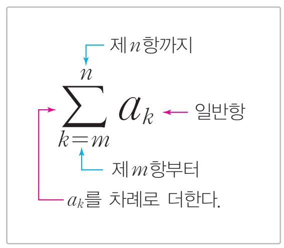
2. $3+6+9+12$를 '$3k$의 k에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하여 얻은 수의 합'과 같이 표현하기로 하면 $3+6+9+12+\cdots+300$은 어떻게 표현할 수 있겠는가?

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

은 기호 $\sum$를 사용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$



● 기호 $\sum$는 영어 sum의 첫 글자 s에 해당하는 그리스 문자의 대문자로서 '시그마(sigma)'라고 읽는다.

여기서 $\sum_{k=1}^{n} a_k$는 수열의 일반항 a_k의 k에 1, 2, 3, $\cdots$, n을 차례로 대입하여 얻은 항 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n의 합을 뜻한다.

따라서 k 대신에 j 또는 l 등의 다른 문자를 사용하여 나타낼 수도 있다. 즉,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{j=1}^{n} a_j=\sum_{l=1}^{n} a_l$$

이다.

보기 (1) $\sum_{k=1}^{10} 5=\underbrace{5+5+5+\cdots+5}_{10\text{개}}$ (2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+13^2=\sum_{k=1}^{13} k^2$

문제 1 다음을 기호 $\sum$를 사용하지 않고 합의 꼴로 나타내어라.

(1) $\sum_{k=1}^{5} 2^k$

(2) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

(3) $\sum_{k=1}^{5} k^3$

(4) $\sum_{k=1}^{n} (3-k)$

문제 2 다음을 기호 $\sum$를 사용하여 나타내어라.

(1) $1+3+5+\cdots+21$

(2) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$

(3) $3+6+12+24+\cdots+192$

(4) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)$

합의 기호 $\sum$의 성질에 대하여 알아보자.

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 상수 c에 대하여

[1] $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) &= (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+\cdots+(a_n+b_n)\\ &= (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)\\ &= \sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k\end{aligned}$$

[2] $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k) &= (a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)+\cdots+(a_n-b_n)\\ &= (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)-(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)\\ &= \sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k\end{aligned}$$

[3] $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}ca_k &= ca_1+ca_2+ca_3+\cdots+ca_n\\ &= c(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)=c\sum_{k=1}^{n}a_k\end{aligned}$$

[4] $$\sum_{k=1}^{n}c=\underbrace{c+c+c+\cdots+c}_{n\text{개}}=cn$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

$\sum$의 기본 성질

(1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

(2) $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

(3) $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

(4) $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

예제 01 $\sum_{k=1}^{10} a_k=15$, $\sum_{k=1}^{10} b_k=20$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{10}(3a_k+2b_k)$ (2) $\sum_{k=1}^{10}(4a_k-1)$

풀이 (1) $\sum_{k=1}^{10}(3a_k+2b_k)=\sum_{k=1}^{10}3a_k+\sum_{k=1}^{10}2b_k=3\sum_{k=1}^{10}a_k+2\sum_{k=1}^{10}b_k=3\cdot15+2\cdot20=85$

(2) $\sum_{k=1}^{10}(4a_k-1)=\sum_{k=1}^{10}4a_k+\sum_{k=1}^{10}(-1)=4\sum_{k=1}^{10}a_k+(-1)\cdot10=4\cdot15-10=50$

답 (1) 85 (2) 50

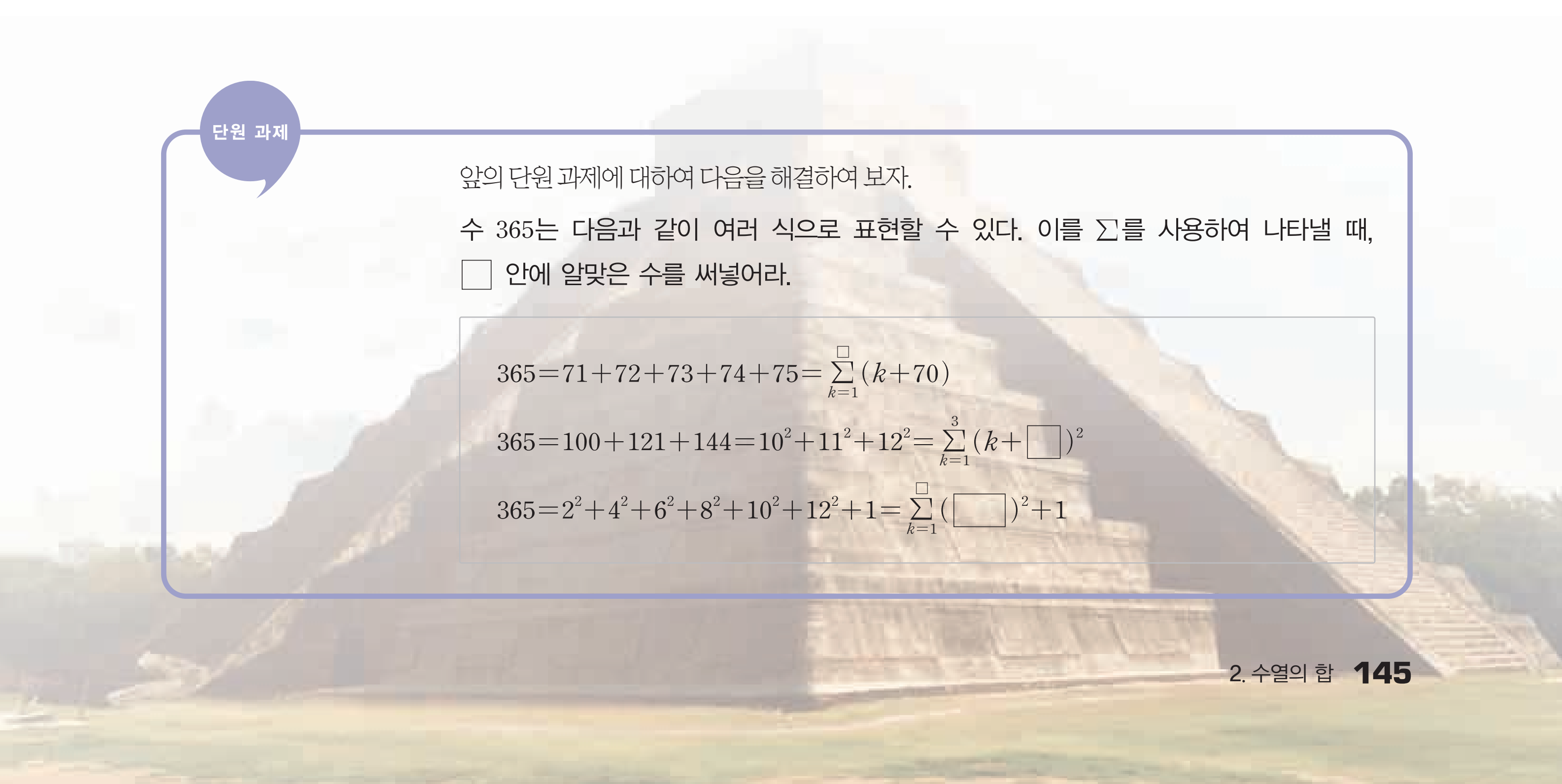
문제 3 $\sum_{k=1}^{15} a_k=-7$, $\sum_{k=1}^{15} b_k=10$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{15}(5a_k+4b_k)$ (2) $\sum_{k=1}^{15}(3a_k-2b_k+2)$

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

수열 9, 99, 999, …의 첫째항부터 제10항까지의 합이 $\dfrac{10^{11}-10^{a}}{b}$일 때, 자연수 a, b의 값을 구하여 보자.



단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

수 365는 다음과 같이 여러 식으로 표현할 수 있다. 이를 Σ를 사용하여 나타낼 때, $\square$ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

$$365=71+72+73+74+75=\sum_{k=1}^{\square}(k+70)$$

$$365=100+121+144=10^2+11^2+12^2=\sum_{k=1}^{3}(k+\square)^2$$

$$365=2^2+4^2+6^2+8^2+10^2+12^2+1=\sum_{k=1}^{\square}(\square)^2+1$$

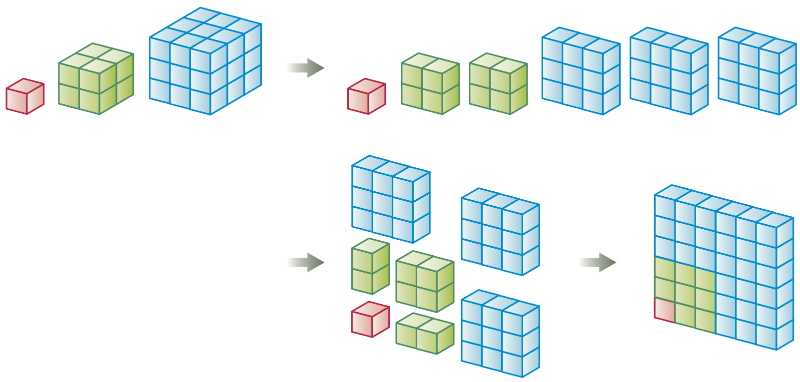
02 여러 가지 수열의 합

● 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.

자연수의 거듭제곱의 합을 어떻게 구하는가?

탐구 활동 그림을 이용하여 자연수의 거듭제곱의 합을 구하려고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.

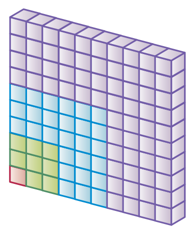
1. 다음 그림을 이용하여 $1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$이 성립함을 설명하여 보자.



2. **1**과 같은 방법으로 오른쪽 그림을 이용하여

$$1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2$$

이 성립함을 설명하여 보자.



자연수의 거듭제곱으로 이루어진 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하여 보자.

1부터 n까지의 자연수의 합, 즉 $\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\cdots+n$은 첫째항이 1이고, 공차가 1인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\frac{n\{2\cdot 1+(n-1)\cdot 1\}}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

이다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

이 성립한다.

이제 1부터 n까지의 자연수의 제곱의 합, 즉 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$을 구하여 보자.

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

항등식 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$의 k에 1, 2, 3, $\cdots$, n을 차례로 대입하면

$$\begin{array}{ll} k=1\text{일 때}, & 2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1 \\ k=2\text{일 때}, & 3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1 \\ k=3\text{일 때}, & 4^3-3^3=3\cdot3^2+3\cdot3+1 \\ \quad\vdots & \qquad\vdots \\ k=n\text{일 때}, & (n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1 \end{array}$$

이므로 위의 n개의 등식을 변끼리 더하여 정리하면

$$(n+1)^3-1^3=3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3(1+2+\cdots+n)+(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{개}})$$

$$=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2=(n+1)^3-3\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n-1=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

이다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

이 성립한다.

문제 1 항등식 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$을 이용하여 다음 등식이 성립함을 증명하여라.

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

$\sum_{k=1}^{n}k^2 \neq \sum_{k=1}^{n}k\sum_{k=1}^{n}k$

자연수의 거듭제곱의 합

(1) $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

보기 (1) $1+2+3+\cdots+15=\sum_{k=1}^{15} k=\frac{15(15+1)}{2}=120$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+12^2=\sum_{k=1}^{12} k^2=\frac{12(12+1)(2\cdot 12+1)}{6}=650$

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+9^3=\sum_{k=1}^{9} k^3=\left\{\frac{9(9+1)}{2}\right\}^2=2025$

문제 2 다음 합을 구하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{20} k^2$

(2) $\sum_{k=1}^{20} k^3$

(3) $1^2+2^2+3^2+\cdots+15^2$

(4) $1^3+2^3+3^3+\cdots+15^3$

발전

문제 3 다음 합을 구하여라.

$\sum_{k=7}^{20} a_k=\sum_{k=1}^{20} a_k-\sum_{k=1}^{6} a_k$

(1) $7^2+8^2+9^2+\cdots+20^2$

(2) $7^3+8^3+9^3+\cdots+20^3$

예제 01 다음 합을 구하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{n} (k^2+k)$

(2) $\sum_{k=1}^{n} (k+1)(k-4)$

풀이 (1) $\sum_{k=1}^{n} (k^2+k)=\sum_{k=1}^{n} k^2+\sum_{k=1}^{n} k$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

(2) $\sum_{k=1}^{n} (k+1)(k-4)=\sum_{k=1}^{n} (k^2-3k-4)=\sum_{k=1}^{n} k^2-3\sum_{k=1}^{n} k-\sum_{k=1}^{n} 4$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-3\cdot\frac{n(n+1)}{2}-4n$$

$$=\frac{n(n^2-3n-16)}{3}$$

답 (1) $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ (2) $\frac{n(n^2-3n-16)}{3}$

문제 4 다음 합을 구하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{10}(k^3+2k^2)$　　(2) $\sum_{k=1}^{5}(2k+1)(2k-1)$

예제 02

다음 합을 구하여라.

$$2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+\cdots+(n+1)(n+2)$$

풀이 주어진 식을 $\sum$를 사용하여 나타내면

$$\begin{aligned}2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+\cdots+(n+1)(n+2)&=\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)\\&=\sum_{k=1}^{n}(k^2+3k+2)\\&=\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}2\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+2n\\&=\frac{n(n^2+6n+11)}{3}\end{aligned}$$

답 $\dfrac{n(n^2+6n+11)}{3}$

문제 5 다음 합을 구하여라.

(1) $1\cdot4+2\cdot5+3\cdot6+\cdots+n(n+3)$　　(2) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2$

이제 분수 꼴로 주어진 간단한 수열의 합을 구하여 보자.

일반항이 분수 꼴이고, 분모가 두 일차식의 곱으로 나타나는 수열의 합을 구할 때에는

$$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\ (\text{단, } A\neq B)$$

임을 이용하여 각 항을 두 개의 항으로 분리하여 구한다.

예제 03 다음 합을 구하여라.

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

풀이 자연수 k에 대하여

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

이므로 주어진 식을 $\sum$를 사용하여 나타내면

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$
$$=\frac{n}{n+1}$$

답 $\frac{n}{n+1}$

$\frac{1}{k(k+1)}$
$=\frac{1}{(k+1)-k}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$
$=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$

문제 6 다음 합을 구하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ (2) $\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)}$

$\frac{1}{k(k+2)}$
$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

발전 문제 7 다음 합을 구하여라.

(1) $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

중단원 기초

1 다음을 기호 $\sum$를 사용하지 않고 합의 꼴로 나타내어라.

01 $\sum$의 뜻과 성질

(1) $\sum_{k=1}^{5}(4k+1)$ (2) $\sum_{k=1}^{8}(k+1)(k-1)$

(3) $\sum_{k=1}^{n}(-2)^k$ (4) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}$

2 다음을 기호 $\sum$를 사용하여 나타내어라.

01 $\sum$의 뜻과 성질

(1) $1+2+3+4+\cdots+n$

(2) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}$

(3) $1+4+7+\cdots+(3n-2)$

(4) $1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots+n(n+2)$

3 $\sum_{k=1}^{20}a_k=12$, $\sum_{k=1}^{20}b_k=-5$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.

01 $\sum$의 뜻과 성질
$\sum$의 기본 성질

(1) $\sum_{k=1}^{20}(2a_k+4b_k)$ (2) $\sum_{k=1}^{20}(a_k-3b_k+1)$

4 다음 합을 구하여라.

02 여러 가지 수열의 합
자연수의 거듭제곱의 합

(1) $1+2+3+\cdots+10$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3$

5 다음 합을 구하여라.

02 여러 가지 수열의 합

(1) $\sum_{k=1}^{5}k(2k-1)$ (2) $\sum_{k=1}^{10}(k+2)^2$

[해답 p.229]

중단원 기본

수준별 학습

1 $\sum_{k=1}^{20} a_k=5$, $\sum_{k=1}^{20} a_k^2=10$일 때, $\sum_{k=1}^{20}(2a_k-3)^2$의 값을 구하여라.

01 ∑의 뜻과 성질
∑의 기본 성질

2 다음 합을 구하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{29}(k-1)-\sum_{k=1}^{30}k$

(2) $\sum_{k=1}^{20}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{20}k(k+2)$

01 ∑의 뜻과 성질
∑의 기본 성질

3 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 $a_n=n^2-2n$일 때, 다음 합을 구하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{2n} a_k$

(2) $\sum_{k=1}^{n} a_{2k}$

02 여러 가지 수열의 합

4 다음 합을 구하여라.

(1) $1^2\cdot1+2^2\cdot3+3^2\cdot5+\cdots+n^2(2n-1)$

(2) $\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{4\cdot6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+3)}$

02 여러 가지 수열의 합

5 다음 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하여라.

$$1,\quad 1+2,\quad 1+2+3,\quad 1+2+3+4,\quad \cdots$$

02 여러 가지 수열의 합

중단원 실력

1 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=1$, $a_{20}=7$일 때,

$$\sum_{k=1}^{19} a_{k+1} - \sum_{k=2}^{20} a_{k-1}$$

의 값을 구하여라.

01 $\sum$의 뜻과 성질

2 다음 합을 구하여라.

$$1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots+(n-1)\cdot 2+n\cdot 1$$

02 여러 가지 수열의 합

3 $f(a)=\sum_{k=1}^{5}(k^2+4ak-a^2)$일 때, $f(a)$의 최댓값을 구하여라.

02 여러 가지 수열의 합

4 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 7이고 공차가 2인 등차수열일 때, 다음 합을 구하여라.

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{a_{109}}+\sqrt{a_{110}}}$$

02 여러 가지 수열의 합

5 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \frac{n(4n^2+9n-1)}{6},\quad \sum_{k=1}^{n} b_k = n^2$$

일 때, $\sum_{k=1}^{5} a_k$의 값을 구하여라.

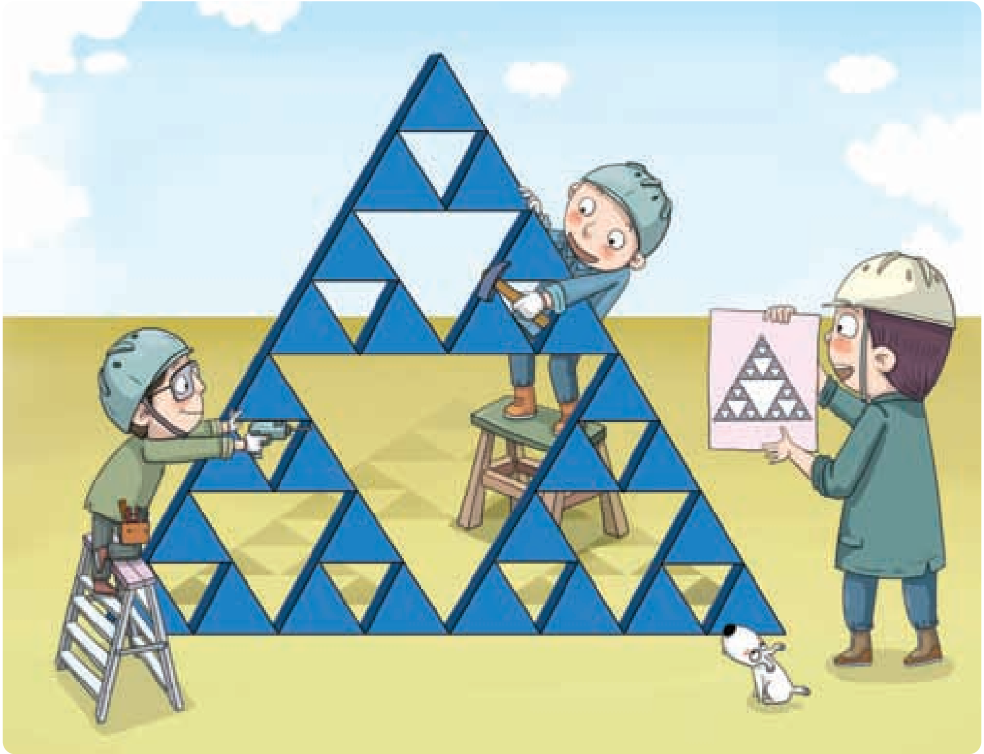
02 여러 가지 수열의 합

3 수학적 귀납법

어떤 도형이 될까?

큰 종이를 준비하여 다음과 같은 활동을 해 보자.

❶ 정삼각형을 크게 그리고 그 안을 색칠한다.
❷ 정삼각형의 세 변의 중점을 연결하는 선을 그으면 4개의 작은 정삼각형이 생긴다. 이 중에서 가운데 삼각형을 오려서 없앤다.
❸ 남은 3개의 정삼각형에서 ❷의 과정을 실행한다.
❹ 남은 9개의 정삼각형에서 ❷의 과정을 실행한다.



단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 157쪽

색칠된 모든 삼각형의 넓이의 합을 수학적으로 표현할 수 있을까?

01 수열의 귀납적 정의

● 수열의 귀납적 정의를 이해한다.

수열의 귀납적 정의란 무엇인가?

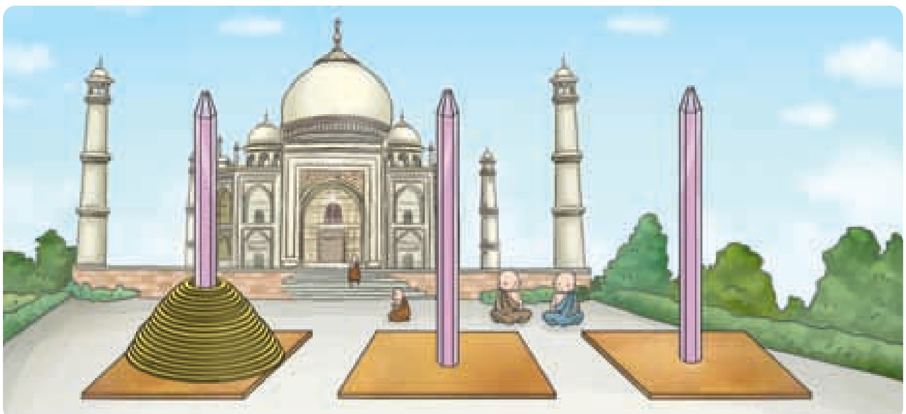
생각 열기

하노이의 탑

한 사원에 다음과 같은 전설이 전해지고 있다.

> 이 사원에는 커다란 구리판에 3개의 다이아몬드 막대가 서 있고 그중 하나에 순금으로 된 64개의 크기가 다른 원판이 큰 것부터 쌓여 있다. 원판은 하나씩 옮길 수 있으며 이때 큰 원판이 작은 원판 위에 놓이면 안 된다. 64개의 원판을 다른 막대 위에 모두 옮겨 놓으면 세상의 종말이 온다.

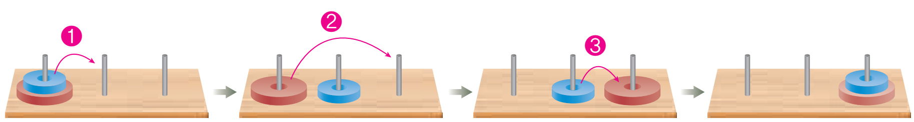
이 전설에서 유래되어 큰 원판이 작은 원판 위에 놓이지 않도록 원판을 하나씩 옮겨서 한 막대에서 다른 한 막대로 원판을 모두 옮기는 게임을 '하노이의 탑' 이라고 한다.



탐구 활동

하노이의 탑에서 한 막대에 끼워진 n개의 원판을 다른 한 막대로 모두 옮기는 데 필요한 원판의 최소 이동 횟수를 a_n이라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 다음 그림을 보고 $a_2=3$임을 확인하여 보자.



2. a_3의 값을 구하여 보자.

3. a_3을 a_2를 이용하여 나타낼 수 있는지 말하여 보자.

수열은 일반항으로 정의하기도 하지만 첫째항과 임의의 이웃하는 두 항 사이의 관계식으로 정의하기도 한다.

이를테면

$$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

로 정의되는 수열은

$$a_1=1,\ a_2=a_1+2=3,\ a_3=a_2+2=5,\ \cdots$$

이므로 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이다.

일반적으로 수열 $\{a_n\}$에서

$$\begin{cases} \text{첫째항 } a_1\text{의 값} \\ \text{이웃하는 두 항 } a_n\text{과 } a_{n+1} \text{ 사이의 관계식 } (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

이 주어질 때, a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식에 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 차례로 대입하면 모든 항 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$이 정해진다.

이와 같이 처음 몇 개의 항과 이웃하는 여러 항 사이의 관계식으로 수열을 정의하는 것을 수열의 **귀납적 정의**라고 한다.

예제 01 $a_1=1,\ a_{n+1}=2a_n+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 제5항을 구하여라.

풀이 $a_{n+1}=2a_n+1$에 $n=1,\ 2,\ 3,\ 4$를 차례로 대입하면

$n=1$일 때, $a_2=2a_1+1=2\times1+1=3$

$n=2$일 때, $a_3=2a_2+1=2\times3+1=7$

$n=3$일 때, $a_4=2a_3+1=2\times7+1=15$

$n=4$일 때, $a_5=2a_4+1=2\times15+1=31$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 제5항은 31이다.

답 31

문제 1 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 제5항을 구하여라. (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

(1) $a_1=8,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$

(2) $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+n$

(3) $a_1=3,\ a_{n+1}=2a_n+n$

(4) $a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+2^n$

예제 02

교내 줄넘기 대회에 참가할 예정인 진경이는 연습 첫째 날에 줄넘기를 20분 동안 하고, 둘째 날부터는 전날의 $\frac{5}{4}$배보다 1분 짧게 하여 대회를 준비하기로 하였다. 연습을 시작한 지 n일째 되는 날에 줄넘기를 한 시간을 a_n분이라고 할 때, 다음을 구하여라.

(1) a_2, a_3의 값　　　　(2) a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식

풀이 (1) 둘째 날에는 첫째 날 20분의 $\frac{5}{4}$배보다 1분 짧은 시간 동안 줄넘기를 하였으므로

$$a_2=20\times\frac{5}{4}-1=24(\text{분})$$

마찬가지로 셋째 날에 줄넘기를 한 시간은

$$a_3=24\times\frac{5}{4}-1=29(\text{분})$$

(2) $(n+1)$일째 날에는 n일째 날에 줄넘기를 한 시간의 $\frac{5}{4}$배보다 1분 짧게 하였으므로

$$a_{n+1}=a_n\times\frac{5}{4}-1=\frac{5}{4}a_n-1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

답 (1) $a_2=24$, $a_3=29$　(2) $a_{n+1}=\frac{5}{4}a_n-1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

문제 2 어느 도시에서 도서관을 개관하여 첫째 날에 20권의 도서가 대출되었다. 둘째 날부터는 매일 5권이 반납되고, 반납되지 않은 대출 도서의 수만큼 다시 추가로 대출되었다고 한다. 개관한 지 n일째 되는 날에 대출 중인 도서가 a_n권이라고 할 때, 다음을 구하여라.

(1) a_2의 값

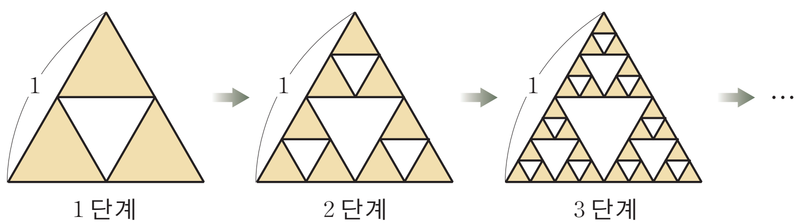
(2) a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식

(3) a_5의 값

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

다음 그림은 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 내부를 어떤 규칙에 따라 색칠하여 나열한 것이다. n단계에 색칠된 모든 정삼각형의 넓이의 합을 a_n이라고 할 때 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하고 a_3의 값을 구하여라.



02 수학적 귀납법

- 수학적 귀납법의 원리를 이해한다.
- 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.

수학적 귀납법이란 무엇인가?

탐구 활동

도미노 막대를 일렬로 세운 뒤, 하나만 쓰러뜨려서 모두 쓰러지도록 하는 게임을 하려고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 게임에 성공하려면 몇 번째 막대를 쓰러뜨려야 하는가?

2. 게임에 성공하려면 k번째 막대가 쓰러진 다음에 바로 몇 번째 막대가 쓰러져야 하는가?

모든 자연수 n에 대하여

$$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

이 성립함을 등차수열의 합의 공식 이외의 방법으로 증명하여 보자.

등식 ①에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례로 대입하여 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립함을 보이는 것은 불가능하므로 다음과 같이 증명하여 보자.

(i) $n=1$일 때

$$(\text{좌변})=1, (\text{우변})=\frac{1\times2}{2}=1$$

이므로 ①이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$1+2+3+4+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2} \qquad \cdots\cdots ②$$

이다. ②의 양변에 $k+1$을 더하면

$$\begin{aligned}1+2+3+4+\cdots+k+(k+1)&=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\&=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\end{aligned}$$

이므로 $n=k+1$일 때에도 ①이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)가 성립하므로 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다고 할 수 있다. 왜냐하면 (ⅰ)에 의하여 $n=1$일 때 ①이 성립하고, (ⅱ)에 의하여 $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$일 때에도 다음과 같이 ①이 성립하기 때문이다.

$n=1$일 때 ①이 성립하므로 $n=2$일 때에도 ①이 성립한다.
$n=2$일 때 ①이 성립하므로 $n=3$일 때에도 ①이 성립한다.
$n=3$일 때 ①이 성립하므로 $n=4$일 때에도 ①이 성립한다.
⋮

따라서 (ⅰ), (ⅱ)가 성립하면 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립함을 알 수 있다.

이와 같은 방법으로 자연수에 대한 명제를 증명하는 방법을 **수학적 귀납법**이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

수학적 귀납법

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(1) $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.
(2) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

예제 01 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \cdots\cdots ①$$

증명 (ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$=1=$(우변)

따라서 $n=1$일 때 ①이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

양변에 $(k+1)^2$을 더하면

$$\begin{aligned}1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 ①이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

문제 1 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

(1) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

(2) $1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots+n(n+2)=\dfrac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

일반적으로 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 $n\geq m$ (m은 자연수)인 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명할 때에는 다음 두 가지를 보이면 된다.

> (1) $n=m$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.
> (2) $n=k$ $(k\geq m)$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

예제 02 $h>0$일 때, $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$(1+h)^n>1+nh \quad \cdots\cdots ①$$

증명 (i) $n=2$일 때

$$(\text{좌변})=(1+h)^2=1+2h+h^2>1+2h=(\text{우변})$$

따라서 $n=2$일 때 ①이 성립한다.

(ii) $n=k$ $(k\geq2)$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$(1+h)^k>1+kh$$

양변에 $1+h$를 곱하면 $1+h>0$이므로

$$(1+h)^k(1+h)=(1+h)^{k+1}>(1+kh)(1+h)$$

그런데 $(1+kh)(1+h)=1+(k+1)h+kh^2>1+(k+1)h$이므로

$$(1+h)^{k+1}>1+(k+1)h$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 ①이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

문제 2 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{2n}{n+1}$$

중단원 기초

1 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$을 제2항부터 제5항까지 나열하여라.

01 수열의 귀납적 정의

(1) $a_1=3,\ a_{n+1}-a_n=4\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $a_1=1,\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=3\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

2 다음은 수학적 귀납법을 설명한 것이다. $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

02 수학적 귀납법

> 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.
> (i) $n=\square$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=\square$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

3 다음은 모든 자연수 n에 대하여

02 수학적 귀납법

$$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

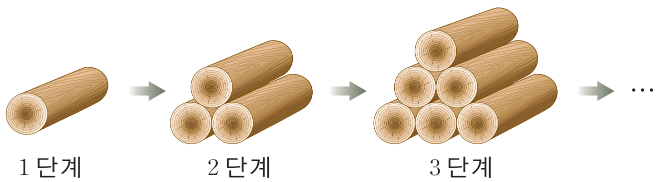
> (i) $n=1$일 때
> $$(좌변)=1=(우변)$$
> 따라서 $n=1$일 때 ①이 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때 ①이 성립한다고 가정하면
> $$1+3+5+7+\cdots+(2k-1)=k^2$$
> 양변에 $2(k+1)-1=2k+1$을 더하면
> $$\begin{aligned}1+3+5+7+\cdots+(2k-1)+(2k+1)&=\square+(2k+1)\\&=(\square)^2\end{aligned}$$
> 따라서 $n=k+1$일 때에도 ①이 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ①이 성립한다.

[해답 p.230]

중단원 기본

1 다음 그림과 같이 통나무를 단계별로 쌓았다고 한다. n단계의 통나무의 총 개수를 a_n이라고 할 때, a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하여라.

01 수열의 귀납적 정의



2 다음은 모든 자연수 n에 대하여 n^3+5n이 6의 배수임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. $\square$ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

02 수학적 귀납법

> $a_n=n^3+5n$이라고 하자.
>
> (i) $n=\square$일 때, $a_1=1+5=6$
>
> 따라서 a_1은 6의 배수이다.
>
> (ii) $n=k$일 때 a_k가 6의 배수라고 가정하면
>
> $$a_k=k^3+5k=6m\ (m\text{은 자연수})$$
>
> $n=k+1$일 때
>
> $$a_{k+1}=(k+1)^3+5(k+1)=\boxed{}+3k(k+1)$$
>
> 그런데 $\boxed{}$과 $3k(k+1)$은 모두 6의 배수이므로
>
> $n=\boxed{}$일 때에도 a_n은 6의 배수이다.
>
> (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 n^3+5n은 6의 배수이다.

3 다음을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

02 수학적 귀납법

(1) 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}\text{이 성립한다.}$$

(2) $n\geq5$인 모든 자연수 n에 대하여 $2^n>n^2+1$이 성립한다.

4 어느 수족관에 물 40 L가 들어 있다. 매일 수족관에 들어 있는 전날의 물의 반을 버리고 10 L의 물을 새로 넣는다. n일째 되는 날 수족관에 남아 있는 물의 양을 a_n L라고 할 때, a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하여라.

02 수학적 귀납법

중단원 실력

1 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 제15항을 구하여라.

01 수열의 귀납적 정의

$$a_1=2,\ a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

2 다음은 명제 '$n\ge2$인 모든 자연수 n에 대하여 다항식 $x^n-nx+n-1$은 $(x-1)^2$으로 나누어떨어진다.' ⋯⋯ ①

를 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. $\boxed{}$ 안에 알맞은 것을 써넣어라.

02 수학적 귀납법

(i) $n=\boxed{}$일 때, $x^2-2x+2-1=(x-1)^2$

따라서 ①이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\ge\boxed{})$일 때 ①이 성립한다고 가정하면

$$x^k-kx+k-1=(x-1)^2Q(x)$$

$n=k+1$일 때

$$\begin{aligned}x^{k+1}-(k+1)x+(k+1)-1&=x(x^k-kx+k-1)+\boxed{}\\&=(x-1)^2(\boxed{})\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 ①이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\ge2$인 모든 자연수 n에 대하여 다항식 $x^n-nx+n-1$은 $(x-1)^2$으로 나누어떨어진다.

3 다음을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

02 수학적 귀납법

모든 자연수 n에 대하여 n^3+3n^2+2n은 3의 배수이다.

4 20 %의 소금물 100 g과 10 %의 소금물 100 g을 섞은 소금물의 농도를 a_1 %, a_1 %의 소금물 100 g과 10 %의 소금물 100 g을 섞은 소금물의 농도를 a_2 %라고 하자. 이와 같은 시행을 n번 반복한 소금물의 농도를 a_n %라고 할 때, a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하여라.

02 수학적 귀납법

바보 셈과 패리 수열

어떤 타자가 10번의 타석에서 3번의 안타를 쳤다면 이 타자의 타율은 $\frac{3}{10}$이다. 이 타자가 추가로 4번의 타석에서 1번의 안타를 쳤다면 모두 14번의 타석에서 4번의 안타를 친 것이므로 타율은 $\frac{4}{14}$가 된다. 타율을 계산하는 연산 기호를 $\oplus$라고 하면

$$\frac{3}{10} \oplus \frac{1}{4} = \frac{3+1}{10+4} = \frac{4}{14}$$

로 나타낼 수 있다. $\oplus$는 분수의 덧셈을 옳지 않게 하여 분모는 분모끼리 더하고 분자는 분자끼리 더하는 연산으로, 일명 바보 셈으로 불린다.

바보 셈은 영국의 지질학자 존 패리(Farey, J. ; 1766~1826)가 1816년 한 잡지에서 소개한 패리 수열에서도 성립한다. 패리 수열이란 0과 1 사이의 기약분수 중에서 분모가 n 이하인 분수들과 0과 1을 작은 수부터 차례로 나열한 것으로 다음과 같다.

$n=1$일 때, $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$

$n=2$일 때, $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$

$n=3$일 때, $\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$

$n=4$일 때, $\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$ …… ①

이때 모든 패리 수열의 임의의 항은 이웃하는 양쪽의 두 항에 대하여 바보 셈을 한 결과와 같다. 예를 들어 수열 ①을 $\{a_n\}$이라고 할 때,

$$a_3 \oplus a_5 = \frac{1}{3} \oplus \frac{2}{3} = \frac{1+2}{3+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = a_4$$

이다.

| 과 제 | **1** $n=5$일 때 패리 수열을 구하여 보자.

| 과 제 | **2** 과제 1의 수열에서 바보 셈이 성립하는지 확인하여 보자.

대단원 학습 내용 정리

1 등차수열과 등비수열

등차수열

(1) 등차수열: 첫째항부터 차례로 일정한 수(공차)를 더하여 만들어지는 수열

(2) 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은

$$a_n=a+(n-1)d \ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

등차수열의 합

등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은

(1) 첫째항이 a, 제n항이 l일 때, $\dfrac{n(a+l)}{2}$

(2) 첫째항이 a, 공차가 d일 때, $\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

등비수열

(1) 등비수열: 첫째항부터 차례로 일정한 수(공비)를 곱하여 만들어지는 수열

(2) 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 일반항 a_n은

$$a_1=a,\ a_n=ar^{n-1} \ (n=2, 3, 4, \cdots)$$

등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은

(1) $r\neq1$일 때, $\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

(2) $r=1$일 때, na

2 수열의 합

합의 기호 $\sum$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합은 기호 $\sum$를 사용하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k$로 나타낸다. 즉,

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$\sum$의 기본 성질

(1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

(2) $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

(3) $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

(4) $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

자연수의 거듭제곱의 합

(1) $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

3 수학적 귀납법

수열의 귀납적 정의

수열 $\{a_n\}$을 다음과 같은 방법으로 정의하는 것을 수열의 귀납적 정의라고 한다.

$$\begin{cases} \text{첫째항 } a_1\text{의 값} \\ \text{이웃하는 두 항 } a_n\text{과 } a_{n+1}\text{ 사이의 관계식 } (n=1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

수학적 귀납법

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.

(1) $n=1$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다.

(2) $n=k$일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때에도 명제 $p(n)$이 성립한다.

이와 같은 증명 방법을 수학적 귀납법이라고 한다.

용어와 기호 수열, 항, 일반항, 등차수열, 공차, 등차중항, 등비수열, 공비, 등비중항, 귀납적 정의, 수학적 귀납법, a_n, $\{a_n\}$, $\sum_{k=1}^{n}a_k$

대/단/원 평가 문제

선택형

1 다음 중 값이 가장 큰 것은?

① 첫째항이 -10, 공차가 7인 등차수열 $\{a_n\}$의 a_5
② 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$의 a_5
③ $a_2=10$, $a_{10}=90$인 등차수열 $\{a_n\}$의 a_5
④ $a_3=16$, $a_6=128$인 등비수열 $\{a_n\}$의 a_5
⑤ $a_1=1$, $a_2=3$, $a_{n+1}=a_n+2^{n-1}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$ 인 수열 $\{a_n\}$의 a_5

2 첫째항이 -20, 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{20}|$의 값은?

① 0　② 17　③ 34
④ 170　⑤ 324

3 일반항이 $a_n=-4n+55$인 수열에서 첫째항부터 제n항까지의 합이 최대가 되도록 하는 n의 값과 그때의 합을 구하면?

① 12, 350　② 12, 351
③ 12, 356　④ 13, 351
⑤ 13, 356

4 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{a_{11}}{a_1}+\frac{a_{12}}{a_2}+\frac{a_{13}}{a_3}+\cdots+\frac{a_{30}}{a_{20}}=40$$

일 때, $\frac{a_{150}}{a_{100}}$의 값은?

① 16　② 32　③ 48
④ 64　⑤ 81

5 함수 $f(x)=x^{30}+x^{29}+x^{28}+\cdots+x+2$에 대하여 $(f \circ f)(0)$의 값은?

① $2^{30}-2$　② 2^{30}　③ $2^{31}-2$
④ 2^{31}　⑤ $2^{31}+2$

6 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k=2n^2-n$일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_{2k}$의 값은?

① 410　② 420　③ 430
④ 440　⑤ 450

7 $\sum_{k=2}^{n}(k^3+1)-\sum_{k=1}^{n-1}(k^3+1)$의 값은?

① n^3-2　② n^3-1　③ n^3
④ n^3+1　⑤ n^3+2

8 x에 대한 이차방정식

$$nx^2+x-n(n+1)=0 \ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

의 두 근을 α_n, β_n이라고 할 때, $\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{\alpha_k}+\frac{1}{\beta_k}\right)$의 값은?

① $\frac{19}{20}$　② $\frac{20}{21}$　③ $\frac{22}{21}$
④ $\frac{21}{20}$　⑤ $\frac{20}{19}$

[해답 p.231]

9 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\begin{cases} a_{n+1}=2a_n-3b_n \\ b_{n+1}=-3a_n+2b_n \end{cases} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{99}(a_k+b_{k+1})$의 값과 같은 것은?

① $b_{100}-a_1$ ② a_1-b_{100} ③ a_1+b_{100}
④ $-a_1-b_{100}$ ⑤ $b_{100}-b_1$

10 모든 자연수 k에 대하여 $a_k\in\{0, 1, 3\}$이고 $\sum_{k=1}^{n}a_k=22$, $\sum_{k=1}^{n}a_k^2=52$일 때, $\sum_{k=1}^{n}a_k^3$의 값은?

① 140 ② 142 ③ 144
④ 146 ⑤ 148

서답형

11 어떤 직각삼각형의 세 변의 길이가 공차가 3인 등차수열을 이룰 때, 이 직각삼각형의 세 변의 길이를 구하여라.

12 $S_n=1+2\cdot2+3\cdot2^2+4\cdot2^3+\cdots+n\cdot2^{n-1}$ …… ①
일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) $2S_n$을 ①과 같이 합의 꼴로 나타내어라.
(2) $2S_n$에서 ①을 뺀 값을 이용하여 S_n을 구하여라.

13 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$의 세 항 a_2, a_4, a_9가 이 순서대로 공비가 r인 등비수열을 이룰 때, $4r$의 값을 구하여라.

14 길이가 2인 선분 A_1A_2가 있다. 선분 A_1A_2를 2 : 1로 내분하는 점을 A_3이라 하고 선분 A_2A_3을 2 : 1로 내분하는 점을 A_4라고 하자. 이와 같은 방법으로 선분 A_nA_{n+1}을 2 : 1로 내분하는 점을 A_{n+2}라 하고 선분 A_nA_{n+1}의 길이를 a_n이라고 할 때, a_{n+1}과 a_n 사이의 관계식을 구하여라.

|서|술|형|

15 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=n^2-2n$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}\frac{2}{a_ka_{k+1}}$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

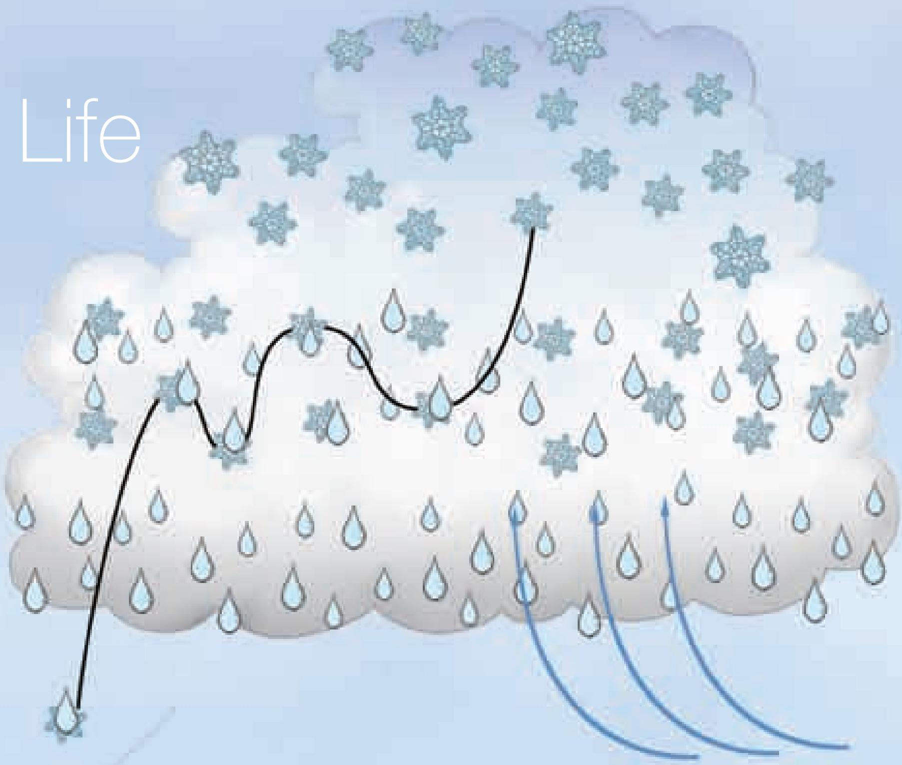
|서|술|형|

16 p가 음이 아닌 정수일 때, 모든 자연수 n에 대하여 다음 등식이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

$$\sum_{l=1}^{n}l(l+1)\cdots(l+p)$$
$$=\frac{n}{p+2}(n+1)\cdots(n+p+1)$$

M+ Real Life

수 학 + 실 생 활



우박수

1937년, 박사 학위를 받은 지 겨우 2년 남짓 된 독일의 수학자 콜라츠(Collatz, L. ; 1910~1990)는 아주 단순하면서도 재미있는 문제를 제시하였다. 그의 이름을 따서 콜라츠의 추측이라고 불리는 이 문제는 다음과 같다.

> 자연수를 하나 고른다. 이 수가 짝수이면 2로 나누고, 홀수이면 3을 곱한 다음 1을 더한다. 다시 그 수가 짝수이면 2로 나누고, 홀수이면 3을 곱한 다음 1을 더한다. 이 과정을 반복하면 그 수는 항상 1이 될까?

이 추측은 3을 곱하고 1을 더하는 과정 때문에 '($3n+1$) 문제'로 불리기도 한다. 처음에 고른 수가 3이면 3은 홀수이므로 다음 수는 $3\times3+1=10$이고, 10은 짝수이므로 다음 수는 5이다. 이 과정을 반복하면 다음과 같다.

$$3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

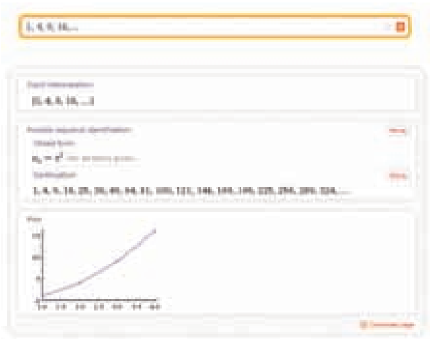
수가 잠깐 커지기는 하지만 짝수가 될 때마다 절반씩 줄어들기 때문에 이 추측은 어느 정도는 당연해 보이기도 한다. 이번에는 7로 시작하여 보자. 이 경우 그 결과는 다음과 같다.

$$7 \to 22 \to 11 \to 34 \to 17 \to 52 \to 26 \to 13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

줄어들 듯하면서 중간중간 커지더니 16단계에서야 겨우 1이 된다. 이처럼 수가 커졌다 작아졌다를 반복하다가 어느 순간 계속 작아져 1이 되는 모습이 마치 우박이 구름 속에서 오르내리며 자라다가 지상으로 떨어지는 것과 비슷하다는 뜻에서 이 수들을 '우박수(hailstone number)'라고 부르기도 한다.

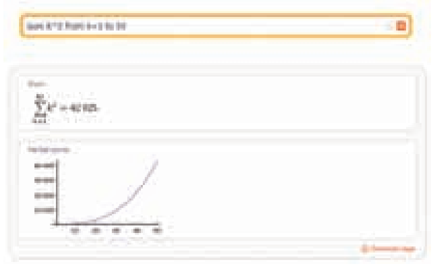
컴퓨터로 수열에 대하여 알아보자.

컴퓨터를 이용하면 수열의 일반항과 합을 쉽게 구할 수 있고, 수열을 함수로 나타내어 그래프를 그릴 수 있다. 적절한 소프트웨어를 이용하여 수열에 대한 다양한 학습 활동과 흥미 있는 경험을 해 보자.



1 \ 수열의 일반항을 구하여 보자.

수열 1, 4, 9, 16, 25, ⋯의 일반항을 구하기 위하여 검색창에 '1, 4, 9, 16, ...' 을 입력하면 왼쪽 그림과 같이 수열의 일반항은 $a_n=n^2$임을 알 수 있다.



2 \ 수열의 합을 구하여 보자.

$\sum_{k=1}^{50} k^2$을 구하기 위하여 입력창에 'sum k^2 from k=1 to 50' 을 입력하면 왼쪽 그림과 같이 $\sum_{k=1}^{50} k^2=42925$임을 알 수 있다.

수 학 + 공 학

M+ Engineering

프랑스의 수학자 라플라스는 다음과 같이 말하였다.

"로그의 발명으로 천문학자의 수명이 두 배로 연장되었다."

Ⅳ 지수와 로그

| 준 | 비 | 학 | 습 |

중② 지수법칙

1 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $3^2 \times 3^5$　　(2) $(2^3)^2$

(3) $5^6 \div 5^3$　　(4) $\dfrac{6^3}{2^3}$

중③ 제곱근

2 다음 수의 제곱근을 구하여라.

(1) 4　　(2) 5　　(3) $(-3)^2$　　(4) $\sqrt{(-7)^2}$

중③ 제곱근의 곱셈과 나눗셈

3 다음을 계산하여라.

(1) $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$　　(2) $\sqrt{24} \div \sqrt{3}$

(3) $\sqrt{3} \times \sqrt{30} \div \sqrt{5}$　　(4) $\sqrt{6} \div \sqrt{8} \times 2\sqrt{5}$

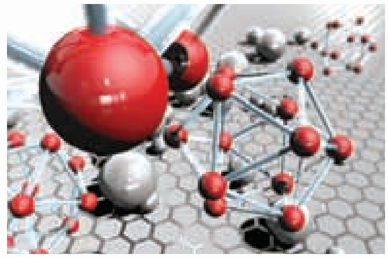
1

지수

전자에서 우주까지

전자의 질량은 몇 g일까? 지구에서 태양까지의 거리는 몇 km일까? 화학, 천문학, 공학 등의 분야에서 다루는 수에는 매우 작거나 큰 수가 있다. 이러한 수를 계산할 때에는 지수를 사용하면 편리하다.

전자의 질량을 지수로 나타내면 약 $9.10955\times\frac{1}{10^{28}}$ g이고 지구에서 태양까지의 거리를 지수로 나타내면 약 1.5×10^{8} km이다.



한편 컴퓨터에서 데이터의 양을 나타내는 단위인 바이트(B), 키비바이트(KiB), 메비바이트(MiB), 기비바이트(GiB), 테비바이트(TiB) 사이에는 $1\text{ KiB}=2^{10}\text{ B}$, $1\text{ MiB}=2^{10}\text{ KiB}$, $1\text{ GiB}=2^{10}\text{ MiB}$, $1\text{ TiB}=2^{10}\text{ GiB}$의 관계가 있다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 184쪽

데이터의 양 사이의 관계를 지수를 사용하여 나타낼 수 있을까?

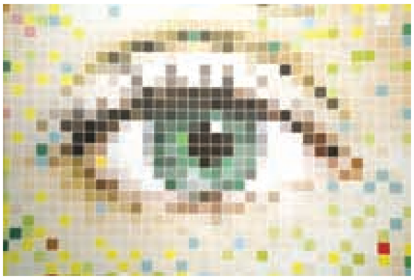
01 거듭제곱과 거듭제곱근

● 거듭제곱과 거듭제곱근의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

거듭제곱과 거듭제곱근이란 무엇인가?

생각 열기 **픽셀**

컴퓨터 모니터의 화면은 더 이상 쪼개지지 않는 작은 점들이 모여 전체를 이룬 것으로 이 작은 점을 픽셀(pixel)이라고 한다. 해상도가 640×480이라는 것은 $640\times480=307200$개의 픽셀이 화면에 들어 있다는 뜻이며 픽셀이 많을수록 화질이 좋다.



탐구 활동 **생각 열기를 보고, 다음 물음에 답하여 보자.**

1. 해상도가 1024×512인 화면에 들어 있는 픽셀은 몇 개인가?

2. **1**에서 구한 픽셀의 개수를 2의 거듭제곱으로 표현하여 보자.

a^{n} (n ← 지수, a ← 밑)

실수 a를 n번 곱한 a^n을 a의 n제곱이라 하고, a, a^2, a^3, $\cdots$을 통틀어 a의 거듭제곱이라고 한다. 이때 a^n에서 a는 거듭제곱의 밑, n은 거듭제곱의 지수이다.

중학교에서 배운 다음과 같은 지수법칙을 이용하면 거듭제곱을 포함한 복잡한 식을 간단히 할 수 있다.

지수법칙

a, b가 실수이고 m, n이 자연수일 때

(1) $a^m a^n = a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n = a^{mn}$

(3) $(ab)^n = a^n b^n$

(4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ $(b\neq0)$

(5) $a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n) \end{cases}$
$(a\neq0)$

보기 (1) $a^2b^3\times ab^4 = a^{2+1}b^{3+4} = a^3b^7$

(2) $a\neq0$, $b\neq0$일 때, $a^4b^2\div(ab)^3 = a^4b^2\div a^3b^3 = \dfrac{a^{4-3}}{b^{3-2}} = \dfrac{a}{b}$

문제 1 $a\neq 0$, $b\neq 0$일 때, 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $(ab^2)^3\div\left(\dfrac{a}{b^2}\right)^2$　　　(2) $ab^3\div\left(\dfrac{b}{a^2}\right)^3\times\left(\dfrac{a}{b}\right)^3$

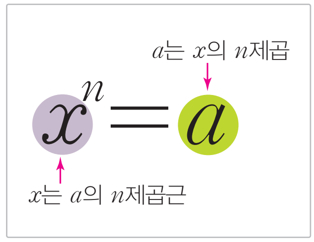
제곱하여 실수 a가 되는 수, 즉 $x^2=a$인 x를 a의 제곱근이라 하고, 세제곱하여 a가 되는 수, 즉 $x^3=a$인 x를 a의 세제곱근이라고 한다.

$(-2)^3=-8$에서 -2는 -8의 세제곱근이다.

일반적으로 n이 2 이상의 자연수일 때 n제곱하여 실수 a가 되는 수, 즉

$$x^n=a$$

를 만족시키는 수 x를 a의 n제곱근이라고 한다.



x는 a의 n제곱근 $\iff x^n=a$

이때 a의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, …을 통틀어 a의 **거듭제곱근**이라고 한다.

예제 01 8의 세제곱근 중에서 실수인 것을 모두 구하여라.

실수 a의 n제곱근은 복소수의 범위에서 n개가 있으나, 여기에서는 a의 n제곱근 중에서 실수인 것만을 생각하기로 한다.

풀이 8의 세제곱근을 x라고 하면 $x^3=8$이므로

$$x^3-8=0,\ (x-2)(x^2+2x+4)=0$$

$$x=2 \text{ 또는 } x=-1\pm\sqrt{3}i$$

따라서 8의 세제곱근 중에서 실수인 것은 2이다.　　**답** 2

문제 2 다음 거듭제곱근 중에서 실수인 것을 모두 구하여라.

(1) -1의 세제곱근　　　(2) 81의 네제곱근

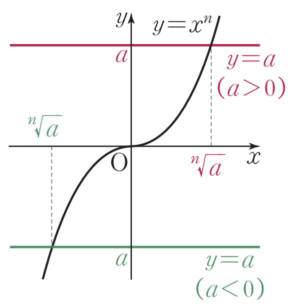
실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^n=a$의 실근이므로 함수 $y=x^n$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표와 같다.

[1] n이 홀수인 경우

$x\geq 0$일 때 $x^n\geq 0$이고, $(-x)^n=-x^n$이므로 $y=x^n$의 그래프는 원점에 대하여 대칭인 오른쪽 그림과 같은 모양이다. 따라서 임의의 실수 a에 대하여 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 오직 하나뿐이고, 이것을

$$\sqrt[n]{a}$$

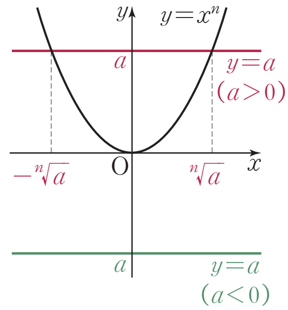
와 같이 나타낸다.



$\sqrt[n]{a}$는 'n제곱근 a'라고 읽는다.

[2] n이 짝수인 경우

$x^n \geq 0$이고, $(-x)^n = x^n$이므로 $y=x^n$의 그래프는 y축에 대하여 대칭인 오른쪽 그림과 같은 모양이다.



(i) $a>0$일 때, a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 양수와 음수 두 개가 있고, 이것을 각각

$$\sqrt[n]{a},\ -\sqrt[n]{a}$$

와 같이 나타낸다.

$\sqrt[2]{a}$는 간단히 $\sqrt{a}$로 나타낸다.

(ii) $a=0$일 때, a의 n제곱근은 0 하나뿐이다. 즉, $\sqrt[n]{0}=0$이다.

(iii) $a<0$일 때, a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 없다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

a의 실수인 n제곱근

n이 2 이상의 자연수일 때

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a},\ -\sqrt[n]{a}$	0	없다.

보기 (1) 27의 세제곱근 중에서 실수인 것은 3이므로 $\sqrt[3]{27}=3$이다.

(2) -27의 세제곱근 중에서 실수인 것은 -3이므로 $\sqrt[3]{-27}=-3$이다.

(3) 16의 네제곱근 중 실수인 것은 2 또는 -2이므로 $\sqrt[4]{16}=2$, $-\sqrt[4]{16}=-2$이다.

문제 3 다음 값을 구하여라.

(1) $\sqrt[3]{64}$　　(2) $\sqrt[3]{-1}$

(3) $\sqrt[4]{256}$　　(4) $-\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}}$

거듭제곱근에는 어떤 성질이 있는가?

탐구 활동 **다음 물음에 답하여 보자.**

1. $\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{125}$의 값을 구하여 보자.

2. $\sqrt[3]{8\times125}$의 값을 구하고, **1**의 결과와 비교하여 보자.

$a<0$이고 n이 2 이상의 홀수일 때에도
$$(\sqrt[n]{a})^n=a$$
가 성립한다.

$a>0$이고 n이 2 이상의 자연수일 때, a의 양의 n제곱근 $\sqrt[n]{a}$는 n제곱하여 a가 되는 양수이므로

$$(\sqrt[n]{a})^n=a$$

임을 알 수 있다.

이제 지수법칙을 이용하여 거듭제곱근의 성질을 알아보자.

$a>0$, $b>0$이고 n이 2 이상의 자연수일 때, 지수법칙에 의하여

$$(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n=ab$$

이다. 이때 $a>0$, $b>0$이므로 $\sqrt[n]{a}>0$, $\sqrt[n]{b}>0$이고 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}>0$이다.

따라서 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$는 ab의 양의 n제곱근이므로

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

가 성립한다.

한편 $a>0$, $b>0$이고 n이 2 이상의 자연수일 때, 지수법칙에 의하여

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\frac{a}{b}$$

이다. 이때 $a>0$, $b>0$이므로 $\sqrt[n]{a}>0$, $\sqrt[n]{b}>0$이고 $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}>0$이다.

따라서 $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$는 $\frac{a}{b}$의 양의 n제곱근이므로

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

가 성립한다.

예제 02 $a>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때, $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$이 성립함을 증명하여라.

증명 지수법칙에 의하여

$$\{(\sqrt[n]{a})^m\}^n=(\sqrt[n]{a})^{mn}=(\sqrt[n]{a})^{nm}=\{(\sqrt[n]{a})^n\}^m=a^m$$

이때 $a>0$이므로 $(\sqrt[n]{a})^m>0$이다.

따라서 $(\sqrt[n]{a})^m$은 a^m의 양의 n제곱근이므로

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$$

가 성립한다.

문제 4 $a>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$가 성립함을 증명하여라.

이상을 정리하면 다음과 같다.

거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때

(1) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ (2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

(3) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ (4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

예제 03 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{8}$ (2) $\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{243}}$ (3) $(\sqrt[6]{125})^2$ (4) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$

풀이 (1) $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$

(2) $\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{243}}=\sqrt[4]{\dfrac{3}{243}}=\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}}=\sqrt[4]{\left(\dfrac{1}{3}\right)^4}=\dfrac{1}{3}$

(3) $(\sqrt[6]{125})^2=(\sqrt[6]{5^3})^2=\{(\sqrt[6]{5})^3\}^2=(\sqrt[6]{5})^6=5$

(4) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$

답 (1) 2 (2) $\dfrac{1}{3}$ (3) 5 (4) 2

문제 5 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{16}$ (2) $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}}$

(3) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[3]{8}}\right)^2$ (4) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$

발전

문제 6 $a>0$이고 m, n, p가 자연수일 때, $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$이 성립함을 증명하여라. (단, $n\geq 2$)

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

다음 중에서 옳지 않은 것을 모두 찾아 바르게 고쳐 보자.

(1) $\sqrt[4]{(-6)^4}=-6$ (2) $\sqrt[5]{(-4)^5}=-4$

(3) $\sqrt[5]{-7}=-\sqrt[5]{7}$ (4) $\sqrt[3]{-2^6}=4$

02 지수의 확장과 지수법칙

- 지수가 유리수, 실수까지 확장될 수 있음을 이해한다.
- 지수법칙을 이해하고, 이를 이용하여 식을 간단히 나타낼 수 있다.

0 또는 음의 정수인 지수는 어떻게 정의하는가?

생각 열기

세균의 크기와 무게

세균의 크기는 0.5 nm(나노미터)부터 0.5 μm(마이크로미터)에 이르기까지 다양하다.
세균을 사람의 크기만큼 확대하면 같은 비율로 확대할 때 사람은 지구 정도의 크기가 된다. 또 약 10억 개의 세균이 모여야 그 무게가 약 1 mg(밀리그램)이 된다.

- $1\,\text{nm}=\frac{1}{10^9}\,\text{m}$
  $1\,\mu\text{m}=\frac{1}{10^6}\,\text{m}$
  $1\,\text{mg}=\frac{1}{1000}\,\text{g}$

탐구 활동

생각 열기를 보고, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 약 몇 개의 세균이 모여야 그 무게가 1 g이 되는지 말하여 보자.
2. 미코플라스마라는 세균은 그 크기가 약 0.2 μm에 불과하다고 한다. 미코플라스마의 크기를 m 단위로 나타내어 보자.

지금까지는 지수가 양의 정수인 경우만을 다루었다.
이제 지수가 0 또는 음의 정수인 경우까지 확장하여 보자.
$a\neq0$이고 m, n이 양의 정수일 때, 지수법칙

$$a^m a^n = a^{m+n} \qquad \cdots\cdots ①$$

이 성립한다.
그런데 $m=0$일 때 ①이 성립한다고 하면

$$a^0 a^n = a^{0+n} = a^n$$

이므로

$$a^0 = 1$$

이다.

또 $m=-n$일 때에도 ①이 성립한다고 하면

$$a^{-n}a^{n}=a^{-n+n}=a^{0}=1$$

이므로

$$a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}$$

이다.

따라서 지수가 0 또는 음의 정수인 경우는 다음과 같이 정의한다.

0 또는 음의 정수인 지수의 정의

$a\neq0$이고 n이 양의 정수일 때

$$a^{0}=1,\quad a^{-n}=\frac{1}{a^{n}}$$

보기 (1) $(-2)^{0}=1$ (2) $3^{-2}=\frac{1}{3^{2}}=\frac{1}{9}$

문제 1 다음 값을 구하여라.

(1) $(\sqrt{5})^{0}$ (2) $(-3)^{-4}$

(3) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$ (4) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$

지수가 0 또는 음의 정수인 경우에도 지수법칙이 성립하는지 알아보자.

$a\neq0$이고 m, n이 음의 정수일 때, 두 양의 정수 p, q에 대하여 $m=-p$, $n=-q$라고 하면

$$\begin{aligned}a^{m}a^{n}&=a^{-p}a^{-q}=\frac{1}{a^{p}}\cdot\frac{1}{a^{q}}=\frac{1}{a^{p+q}}\\&=a^{-(p+q)}=a^{(-p)+(-q)}=a^{m+n}\end{aligned}$$

이므로

$$a^{m}a^{n}=a^{m+n}$$

이 성립한다.

m 또는 n이 0일 때에도 $a^{m}a^{n}=a^{m+n}$이 성립한다.

예제 01

$a\neq0$이고 m, n이 음의 정수일 때, $(a^m)^n=a^{mn}$이 성립함을 증명하여라.

● m 또는 n이 0일 때에도 $(a^m)^n=a^{mn}$이 성립한다.

증명 $m=-p$, $n=-q$ (p, q는 양의 정수)라고 하면

$$(a^m)^n=(a^{-p})^{-q}=\left(\frac{1}{a^p}\right)^{-q}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a^p}\right)^q}=\frac{1}{\frac{1}{a^{pq}}}$$
$$=a^{pq}=a^{(-m)(-n)}=a^{mn}$$

문제 2 $a\neq0$, $b\neq0$이고 m, n이 0 또는 음의 정수일 때, 다음이 성립함을 증명하여라.

(1) $(ab)^n=a^nb^n$

(2) $a^m\div a^n=a^{m-n}$

일반적으로 지수가 정수일 때 다음과 같은 지수법칙이 성립한다.

지수가 정수일 때의 지수법칙

$a\neq0$, $b\neq0$이고 m, n이 정수일 때

(1) $a^ma^n=a^{m+n}$

(2) $(a^m)^n=a^{mn}$

(3) $(ab)^n=a^nb^n$

(4) $a^m\div a^n=a^{m-n}$

● $\left(\frac{a}{b}\right)^n=(ab^{-1})^n=a^nb^{-n}=\frac{a^n}{b^n}$

보기

(1) $2^2\times2^{-3}=2^{2+(-3)}=2^{-1}=\frac{1}{2}$

(2) $(3^{-3})^2=3^{-3\times2}=3^{-6}=\frac{1}{3^6}=\frac{1}{729}$

(3) $a\neq0$, $b\neq0$일 때, $a^{-1}\times b^{-1}=(ab)^{-1}=\frac{1}{ab}$

(4) $a\neq0$일 때, $a^{-3}\div a^{-7}=a^{-3-(-7)}=a^4$

문제 3 $a\neq0$, $b\neq0$일 때, 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $a^4\times a^{-3}$

(2) $(a^3)^{-2}\div a^{-4}$

(3) $(a^3b^{-1})^2$

(4) $(ab)^6\div(a^{-2}b^3)^2$

유리수인 지수는 어떻게 정의하는가?

탐구 활동 다음 물음에 답하여 보자.

1. 2의 세제곱근 중에서 실수인 것을 구하여 보자.
2. 지수가 유리수인 경우에도 지수법칙 $(a^m)^n=a^{mn}$이 성립한다고 할 때,

$$(2^p)^3=2$$

를 만족시키는 p의 값을 생각하여 보자.

이제 지수를 유리수의 범위까지 확장하여 보자.

$a>0$이고 p, q가 정수일 때, 지수법칙

$$(a^p)^q=a^{pq} \qquad \cdots\cdots ①$$

이 성립한다.

그런데 p, q가 유리수일 때에도 ①이 성립한다고 하면 두 정수 $m, n\ (n\geq2)$에 대하여

$$(a^{\frac{m}{n}})^n=a^{\frac{m}{n}\times n}=a^m$$

이다. 이때 $a^{\frac{m}{n}}$은 a^m의 양의 n제곱근이므로

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

이다.

따라서 지수가 유리수인 경우는 다음과 같이 정의한다.

유리수인 지수의 정의

$a>0$이고 $m, n\ (n\geq2)$이 정수일 때

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\ \text{특히 } a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

보기

(1) $27^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{27^2}=\sqrt[3]{(3^3)^2}=\sqrt[3]{(3^2)^3}=3^2=9$

(2) $9^{-\frac{1}{2}}=9^{\frac{-1}{2}}=\sqrt{9^{-1}}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}$

문제 4 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $4^{\frac{3}{2}}$ (2) $27^{-\frac{1}{3}}$ (3) $81^{0.75}$ (4) $16^{-1.5}$

문제 5 $a>0$일 때, 다음 식을 지수를 사용하여 나타내어라.

(1) $\sqrt[3]{a^2}$ (2) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$ (3) $\dfrac{1}{\sqrt{a^{-2}}}$

지수가 유리수인 경우에도 지수법칙이 성립하는지 알아보자.

$a>0$이고 r, s가 유리수일 때, 정수 m, n, p, q $(n\geq 2,\ q\geq 2)$에 대하여 $r=\dfrac{m}{n}$, $s=\dfrac{p}{q}$라고 하면

$$\begin{aligned} a^r a^s &= a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} a^{\frac{np}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mq}}\sqrt[nq]{a^{np}} \\ &= \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{r+s} \end{aligned}$$

이므로

$$a^r a^s = a^{r+s}$$

이 성립한다.

예제 02 $a>0$이고 r, s가 유리수일 때, $(a^r)^s=a^{rs}$이 성립함을 증명하여라.

증명 $r=\dfrac{m}{n}$, $s=\dfrac{p}{q}$ (m, n, p, q는 정수, $n\geq 2$, $q\geq 2$)라고 하면

$$\begin{aligned} (a^r)^s &= \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{(a^m)^p}} \\ &= \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{rs} \end{aligned}$$

문제 6 $a>0$, $b>0$이고 r, s가 유리수일 때, 다음이 성립함을 증명하여라.

(1) $(ab)^r=a^r b^r$ (2) $a^r\div a^s=a^{r-s}$

일반적으로 지수가 유리수일 때 다음과 같은 지수법칙이 성립한다.

지수가 유리수일 때의 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 r, s가 유리수일 때

(1) $a^r a^s=a^{r+s}$ (2) $(a^r)^s=a^{rs}$

(3) $(ab)^r=a^r b^r$ (4) $a^r\div a^s=a^{r-s}$

보기

(1) $2^2\times 2^{-\frac{1}{3}}=2^{2+\left(-\frac{1}{3}\right)}=2^{2-\frac{1}{3}}=2^{\frac{5}{3}}$

(2) $(3^{\frac{1}{2}})^4=3^{\frac{1}{2}\times 4}=3^2=9$

(3) $a>0$, $b>0$일 때, $(a^{\frac{2}{3}}\times b^{\frac{1}{2}})^6=(a^{\frac{2}{3}})^6\times(b^{\frac{1}{2}})^6=a^4b^3$

(4) $a>0$일 때, $a^{\frac{1}{4}}\div a^{-\frac{3}{4}}=a^{\frac{1}{4}-\left(-\frac{3}{4}\right)}=a$

문제 7 $a>0$, $b>0$일 때, 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $a^{\frac{3}{4}}\times a^{-\frac{1}{2}}$

(2) $(a^3b^{-6})^{-\frac{2}{3}}$

(3) $a^{\frac{1}{3}}\div(a^{-\frac{1}{3}})^6$

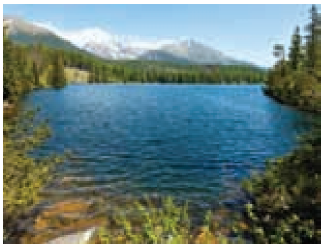
(4) $(a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\times a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}}$

실생활

문제 8 어떤 호수의 수면에 빛의 세기가 I_0인 빛을 비추면 수심이 d m인 곳에서의 빛의 세기 I_d는

$$I_d=I_0\cdot 2^{-\frac{d}{4}}$$

이라고 하자. 이때 수심이 5 m인 곳에서의 빛의 세기는 수심이 13 m인 곳에서의 빛의 세기의 몇 배인지 구하여라.



실수인 지수는 어떻게 정의하는가?

탐구 활동

컴퓨터에서 오른쪽 그림과 같은 계산기 프로그램을 실행하여 [보기]–[공학용]을 선택한 후

2, x^y, 3, =

를 차례로 누르면 2^3을 구할 수 있다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. $2^{1.4}$, $2^{1.41}$, $2^{1.414}$의 값을 반올림하여 소수 넷째 자리까지 구하여 보자.

2. 2, x^y, 2, √, = 를 차례로 누르고 화면에 표시된 값을 반올림하여 소수 넷째 자리까지 말하여 보자.

3. **1**, **2**의 결과를 비교하여 보자.

이제 지수를 실수의 범위까지 확장하기 위하여 지수가 무리수인 경우에는 어떤 의미를 가지는지 $2^{\sqrt{2}}$을 예로 들어 생각하여 보자.

무리수 $\sqrt{2}=1.41421356\cdots$이므로 $\sqrt{2}$에 가까워지는 유리수 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, …를 지수로 가지는 수 2^{1}, $2^{1.4}$, $2^{1.41}$, $2^{1.414}$, $2^{1.4142}$, …은 오른쪽 표와 같이 일정한 수에 한없이 가까워진다는 사실이 알려져 있다.

이 일정한 수를 $2^{\sqrt{2}}$으로 정의한다.

이와 같은 방법으로 $a>0$이고 x가 실수일 때 a^x을 정의할 수 있다.

x	2^x
1	2
1.4	2.639015…
1.41	2.657371…
1.414	2.664749…
1.4142	2.665119…
1.41421	2.665137…
1.414213	2.665143…
⋮	⋮
↓	↓
$\sqrt{2}$	$2^{\sqrt{2}}$

일반적으로 지수가 실수일 때 다음과 같은 지수법칙이 성립한다.

지수가 실수일 때의 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때

(1) $a^x a^y=a^{x+y}$　　(2) $(a^x)^y=a^{xy}$

(3) $(ab)^x=a^x b^x$　　(4) $a^x\div a^y=a^{x-y}$

보기

(1) $3^{\sqrt{2}}\times 3^{2\sqrt{2}}=3^{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}=3^{3\sqrt{2}}$

(2) $(2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}=2^{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=2^3=8$

(3) $a>0$, $b>0$일 때, $(a^{\sqrt{5}}b)^{\sqrt{5}}=a^{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}\times b^{\sqrt{5}}=a^5 b^{\sqrt{5}}$

(4) $a>0$일 때, $a^{1+\sqrt{3}}\div a^{\sqrt{3}}=a^{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}}=a$

문제 9 $a>0$, $b>0$일 때, 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $a^{2\sqrt{2}}\times a^{\sqrt{2}}$　　(2) $(a^{\sqrt{2}+1})^{\sqrt{2}-1}$

(3) $(a^{2\sqrt{3}}b^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$　　(4) $a^{\sqrt{3}+1}\div a^{\sqrt{3}-1}$

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

데이터의 양을 나타내는 단위 메비바이트(MiB), 기비바이트(GiB), 테비바이트(TiB)에 대하여 1 GiB$=2^{10}$ MiB, 1 TiB$=2^{10}$ GiB일 때, 정수인 지수를 사용하여 1 MiB는 몇 TiB인지 말하여라.

[해답 p.233]

중단원 기초

수준별 학습

1 다음 거듭제곱근 중에서 실수인 것을 모두 구하여라.

(1) 49의 제곱근　　(2) 125의 세제곱근

(3) -64의 세제곱근　　(4) 1의 네제곱근

01 거듭제곱과 거듭제곱근

거듭제곱근

2 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt[4]{3}\sqrt[4]{27}$　　(2) $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{162}}$

(3) $(\sqrt[3]{27})^4$　　(4) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}}$

01 거듭제곱과 거듭제곱근

거듭제곱근의 성질

3 다음 값을 구하여라.

(1) $(-3)^0$　　(2) 4^{-2}

(3) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$　　(4) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}$

02 지수의 확장과 지수법칙

0 또는 음의 정수인 지수

4 다음 식을 근호를 사용하여 나타내어라.

(1) $2^{\frac{4}{3}}$　　(2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{3}}$

(3) $5^{0.25}$　　(4) $7^{-0.5}$

02 지수의 확장과 지수법칙

유리수인 지수

5 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $2^{\sqrt{3}}\times 2^{\sqrt{12}}$　　(2) $3^{\sqrt{18}}\div 3^{\sqrt{2}}\times 3^{\sqrt{8}}$

(3) $(5^{\sqrt{3}})^{\sqrt{27}}$　　(4) $\left(2^{\frac{1}{\sqrt{6}}}\times 3^{\sqrt{\frac{2}{3}}}\right)^{\sqrt{6}}$

02 지수의 확장과 지수법칙

실수인 지수

중단원 기본

1 $\sqrt[3]{(-8)^4}$의 네제곱근은 모두 a개이고, 그중에서 실수인 것은 b개이다. 이때 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

01 거듭제곱과 거듭제곱근
거듭제곱근

2 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{\sqrt{81}}$

(2) $\sqrt[3]{-8}\times\dfrac{\sqrt[4]{64}}{\sqrt[4]{4}}$

(3) $(\sqrt[6]{9})^3\times(\sqrt[8]{16})^2$

(4) $\sqrt[4]{16^2}\times(\sqrt[3]{3})^6\div\sqrt{\sqrt[3]{64}}$

01 거듭제곱과 거듭제곱근
거듭제곱근의 성질

3 $a>0$, $b>0$일 때, 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $(\sqrt[3]{a}\times\sqrt{a^3})^{-3}$

(2) $\sqrt[3]{8a\sqrt{a\sqrt{a}}}$

(3) $\sqrt[3]{a^4}\times\sqrt[6]{a}\div\sqrt{a^3}$

(4) $\sqrt[4]{a^2b}\times\sqrt[12]{a^4b^5}\div\sqrt[6]{ab^3}$

02 지수의 확장과 지수법칙
유리수인 지수

4 $(2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}})(2^{\frac{1}{4}}+2^{-\frac{1}{4}})(2^{\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}})$을 간단히 하여라.

02 지수의 확장과 지수법칙
유리수인 지수

5 $a>0$이고 x, y, z가 실수일 때, 다음 식을 간단히 하여라.

$$(a^x)^{y-z}\times(a^y)^{z-x}\times(a^z)^{x-y}$$

02 지수의 확장과 지수법칙
실수인 지수

[해답 p.233]

1 다음 세 수의 크기를 비교하여라.

(1) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{9}$

(2) $\sqrt[4]{3\sqrt[3]{2}}$, $\sqrt[3]{2\sqrt{3}}$, $\sqrt[3]{4^2\sqrt{2}}$

01 거듭제곱과 거듭제곱근
거듭제곱근의 성질

2 $x=4^{\frac{1}{3}}-4^{-\frac{1}{3}}$일 때, $4x^3+12x$의 값을 구하여라.

02 지수의 확장과 지수법칙
유리수인 지수

3 이차방정식 $x^2-2x-2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $2^{\frac{\beta}{\alpha}}\times2^{\frac{\alpha}{\beta}}$의 값을 구하여라.

02 지수의 확장과 지수법칙
지수법칙

4 실수 a가 $\dfrac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$를 만족시킬 때, 4^a+4^{-a}의 값을 구하여라.

02 지수의 확장과 지수법칙
지수법칙

5 어떤 박테리아가 매시간 일정한 비율로 증식하여 처음 p_0만 마리가 t시간 후에 p만 마리가 될 때 다음과 같은 관계식이 성립한다고 하자.

$$p=p_0\cdot a^{kt}\ (a>0,\ a\neq1,\ k>0)$$

처음 1만 마리의 박테리아를 배양하여 6시간 후 4만 마리가 되었다면 배양 후 15시간이 되었을 때 박테리아의 개체 수를 구하여라.

02 지수의 확장과 지수법칙
지수법칙의 활용

2 로그

별의 밝기

밤하늘에 빛나는 별의 밝기는 등급으로 나타낸다.

기원전 2세기경 고대 그리스의 천문학자 히파르코스(Hipparchos ; ?~?B.C. 125)는 별을 맨눈으로 볼 때 밝은 별부터 1등성, 2등성, 3등성, …으로 등급을 매겨 가장 어두운 별을 6등성으로 하였다.

그 후 19세기 영국의 천문학자 포그슨(Pogson, N. R. ; 1829~1891)은 별의 밝기를 실제로 측량하여 1등성의 밝기가 6등성의 약 100배임을 밝히고, 이에 따라 1등급 차이에 해당하는 밝기의 비는 $\sqrt[5]{100}$배인 2.512배가 된다는 사실을 알아내었다. 예를 들어 1등성보다 2.512배 밝은 별은 0등성이고, 이보다 2.512배 밝은 별은 -1등성이다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 198쪽

별의 밝기와 등급 사이에는 어떤 관계가 있을까?

01 로그의 뜻과 성질

● 로그의 뜻을 알고, 그 성질을 이해한다.

로그란 무엇인가?

생각 열기

예방 주사

독감은 바이러스의 특성 때문에 전파 속도가 빠르다. 특히 독감의 원인인 인플루엔자 바이러스에 대하여 특효약이 없으므로 백신에 의한 예방이 필수이다. 연구에 따르면 백신을 맞은 대부분의 연령군에서 접종 12개월째에 면역 지속력이 줄어들었지만, 65세 이상 고령자들은 접종 후 6개월째부터 줄어들었다.

탐구 활동

어떤 예방 주사를 접종한 직후의 면역력 수치 ω는 t시간 후에 $\omega\left(\frac{2}{3}\right)^t$이 된다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자. (단, ω는 상수이다.)

1. 접종한 지 4시간이 지난 후의 면역력 수치를 계산하여 보자.
2. 접종한 후 면역력 수치가 절반이 되는 시간을 구하는 식을 써 보자.

탐구 활동에서 면역력 수치가 절반이 되는 시간은 $\omega\left(\frac{2}{3}\right)^t=\frac{1}{2}\omega$, 즉 $\left(\frac{2}{3}\right)^t=\frac{1}{2}$을 만족시키는 t의 값이다. 이때 t를 $\frac{2}{3}$와 $\frac{1}{2}$로 나타내는 방법을 생각하여 보자.

일반적으로 $a>0$, $a\neq1$일 때, 양수 N에 대하여 $a^x=N$을 만족시키는 실수 x는 오직 하나 존재한다.

이때 x를

$$x=\log_a N$$

과 같이 나타내고, a를 **밑**으로 하는 N의 **로그**라고 한다.

또 N을 $\log_a N$의 **진수**라고 한다.

● log는 logarithm을 줄인 말로 그리스 어인 비(logos)와 수(arithmos)가 결합된 것이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

로그의 정의

$a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때

$$a^x=N \iff x=\log_a N$$

보기 (1) $3^2=9 \iff 2=\log_3 9$　　(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=2 \iff -1=\log_{\frac{1}{2}} 2$

문제 1 다음 등식을 로그를 사용하여 나타내어라.

(1) $2^0=1$　　(2) $10^2=100$　　(3) $5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$　　(4) $3^{-2}=\frac{1}{9}$

문제 2 다음 등식을 지수를 사용하여 나타내어라.

(1) $\log_2 8=3$　　(2) $\log_{27} 3=\frac{1}{3}$　　(3) $\log_{\frac{1}{5}} 25=-2$　　(4) $\log_2 \sqrt[3]{2}=\frac{1}{3}$

예제 01 다음 값을 구하여라.

(1) $\log_3 27$　　(2) $\log_4 \frac{1}{16}$

풀이 (1) $\log_3 27=x$라고 하면 로그의 정의에 의하여

$$3^x=27$$

$27=3^3$이므로 $3^x=3^3$에서　$x=3$

따라서 $\log_3 27=3$이다.

(2) $\log_4 \frac{1}{16}=x$라고 하면 로그의 정의에 의하여

$$4^x=\frac{1}{16}$$

$\frac{1}{16}=4^{-2}$이므로 $4^x=4^{-2}$에서　$x=-2$

따라서 $\log_4 \frac{1}{16}=-2$이다.

답 (1) 3　(2) -2

문제 3 다음 값을 구하여라.

(1) $\log_2 64$　　(2) $\log_3 \frac{1}{27}$　　(3) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}$　　(4) $\log_5 \sqrt{125}$

문제 4 다음 등식을 만족시키는 N의 값을 구하여라.

(1) $\log_5 N=\frac{1}{2}$　　(2) $\log_{\frac{1}{3}} N=2$

사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

다음 그림을 보고, $(-2)^2=4 \Longleftrightarrow \log_{-2}4=2$가 옳은지를 판단하고 그 이유를 말하여 보자.

로그에는 어떤 성질이 있는가?

탐구 활동 **실수 m, n에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.**

1. $2^m=3$, $2^n=5$를 로그를 사용하여 나타내어 보자.

2. **1**의 결과를 이용하여 $m+n$의 값을 구하여 보자.

3. 지수법칙에 의하여 $2^m\times2^n=2^{m+n}=15$이다. $2^{m+n}=15$를 로그를 사용하여 나타내고 **2**의 결과와 비교하여 보자.

로그의 정의와 지수법칙을 이용하여 로그의 성질을 알아보자.

$a>0$, $a\neq1$일 때, $a^0=1$, $a^1=a$이므로 로그의 정의에 의하여

$$\log_a 1=0,\ \log_a a=1$$

이다.

또 $M>0$, $N>0$일 때, $\log_a M=m$, $\log_a N=n$이라고 하면 로그의 정의에 의하여

$$M=a^m,\ N=a^n$$

이고, 지수법칙에 의하여 $MN=a^ma^n=a^{m+n}$이므로

$$\log_a MN=m+n=\log_a M+\log_a N$$

이 성립한다.

예제 02 $a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때, $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$이 성립함을 증명하여라.

증명 $\log_a M=m$, $\log_a N=n$이라고 하면 로그의 정의에 의하여

$$M=a^m,\ N=a^n$$

지수법칙에 의하여 $\frac{M}{N}=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$이므로

$$\log_a \frac{M}{N}=m-n=\log_a M-\log_a N$$

문제 5 $a>0$, $a\neq1$, $N>0$이고 k는 실수일 때, $\log_a N^k=k\log_a N$이 성립함을 증명하여라.

이상을 정리하면 다음과 같다.

로그의 성질

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때

(1) $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

(2) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

(3) $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

(4) $\log_a N^k=k\log_a N$ (k는 실수)

보기 (1) $\log_{\frac{1}{2}} 1=0$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}=1$

(2) $\log_2 6=\log_2 (2\times3)=\log_2 2+\log_2 3=1+\log_2 3$

(3) $\log_7 \frac{2}{7}=\log_7 2-\log_7 7=\log_7 2-1$

(4) $\log_3 \sqrt{3}=\log_3 3^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_3 3=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$

문제 6 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\log_5 1+\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}$

(2) $\log_8 2+\log_8 4$

(3) $\log_2 48-\log_2 3$

(4) $\log_{10} 1000$

예제 03 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\log_2 \frac{2}{3}+2\log_2 \sqrt{24}$ (2) $\frac{1}{2}\log_3 \frac{3}{2}-\log_3 5\sqrt{2}+2\log_3 \sqrt{10}$

풀이 (1) $\log_2 \frac{2}{3}+2\log_2 \sqrt{24}=\log_2 \frac{2}{3}+\log_2(\sqrt{24})^2=\log_2 \frac{2}{3}+\log_2 24$

$=\log_2\left(\frac{2}{3}\times 24\right)=\log_2 16$

$=\log_2 2^4=4$

(2) $\frac{1}{2}\log_3 \frac{3}{2}-\log_3 5\sqrt{2}+2\log_3 \sqrt{10}=\log_3 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\log_3 5\sqrt{2}+\log_3 10$

$=\log_3 \frac{\sqrt{3}\times 10}{\sqrt{2}\times 5\sqrt{2}}=\log_3 \sqrt{3}$

$=\log_3 3^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

답 (1) 4 (2) $\frac{1}{2}$

문제 7 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\log_3 \frac{9}{2}+3\log_3 \sqrt[3]{18}$ (2) $\log_3 \sqrt{2}+\log_3 \frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}\log_3 6$

예제 04 $\log_2 3=a$, $\log_2 5=b$라고 할 때, 다음을 a, b로 나타내어라.

(1) $\log_2 45$ (2) $\log_2 \frac{5}{3}$

풀이 (1) $\log_2 45=\log_2(3^2\times 5)=\log_2 3^2+\log_2 5=2\log_2 3+\log_2 5=2a+b$

(2) $\log_2 \frac{5}{3}=\log_2 5-\log_2 3=b-a$

답 (1) $2a+b$ (2) $b-a$

문제 8 $\log_3 2=a$, $\log_3 5=b$라고 할 때, 다음을 a, b로 나타내어라.

(1) $\log_3 10$ (2) $\log_3 100$

(3) $\log_3 \frac{3}{10}$ (4) $\log_3 \sqrt{40}$

로그의 밑을 다른 수로 어떻게 바꾸는가?

탐구 활동 다음 물음에 답하여 보자.

1. 등식 $2^2=4$를 로그를 사용하여 나타내어 보자.

2. $c>0$, $c\neq1$일 때, 등식 $\log_c 2^2=\log_c 4$를 이용하여 $\dfrac{\log_c 4}{\log_c 2}$의 값을 구하여 보자.

3. **1**과 **2**의 결과를 비교하여 보자.

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$일 때, $\log_a b$를 양수 c $(c\neq1)$를 밑으로 하는 로그로 바꾸는 방법을 알아보자.

$\log_a b=x$, $\log_c a=y$라고 하면 $b=a^x$, $a=c^y$이므로

$$b=a^x=(c^y)^x=c^{xy}$$

이다. 로그의 정의에 의하여 $xy=\log_c b$이므로

$$\log_a b\cdot\log_c a=\log_c b$$

● $a\neq1$일 때, $\log_c a\neq0$

이다. 그런데 $\log_c a\neq0$이므로 양변을 $\log_c a$로 나누면

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

로그의 밑의 변환

a, b, c는 양수이고 $a\neq1$, $c\neq1$일 때

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

보기

(1) $\log_2 5=\dfrac{\log_5 5}{\log_5 2}=\dfrac{1}{\log_5 2}$

(2) $\log_4 8=\dfrac{\log_2 8}{\log_2 4}=\dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2}=\dfrac{3\log_2 2}{2\log_2 2}=\dfrac{3}{2}$

(3) $\log_9 25=\dfrac{\log_3 25}{\log_3 9}=\dfrac{\log_3 5^2}{\log_3 3^2}=\dfrac{2\log_3 5}{2\log_3 3}=\log_3 5$

문제 9 다음 값을 구하여라.

(1) $\log_8 16$　　(2) $\log_{\sqrt{3}} 9$

(3) $\log_2 3 \cdot \log_3 2$　　(4) $\log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 9$

예제 05 $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$라고 할 때, 다음을 a, b로 나타내어라.

(1) $\log_3 8$　　(2) $\log_5 10$

풀이 (1) $\log_3 8 = \dfrac{\log_{10} 8}{\log_{10} 3} = \dfrac{\log_{10} 2^3}{\log_{10} 3} = \dfrac{3\log_{10} 2}{\log_{10} 3} = \dfrac{3a}{b}$

(2) $\log_5 10 = \dfrac{\log_{10} 10}{\log_{10} 5} = \dfrac{1}{\log_{10} 5}$이고,

$\log_{10} 5 = \log_{10} \dfrac{10}{2} = 1 - \log_{10} 2 = 1 - a$이므로

$\log_5 10 = \dfrac{1}{\log_{10} 5} = \dfrac{1}{1-a}$

답 (1) $\dfrac{3a}{b}$　(2) $\dfrac{1}{1-a}$

문제 10 $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$라고 할 때, 다음을 a, b로 나타내어라.

(1) $\log_2 18$　　(2) $\log_{10} \sqrt{6}$

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

$a>0$, $b>0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$일 때, 다음 등식이 성립함을 설명하여 보자.

(1) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

(2) $\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m} \log_a b$ (m, n은 실수, $m \neq 0$)

02

상용로그

● 상용로그를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

상용로그란 무엇인가?

생각 열기

지진의 리히터 규모

2011년 3월 일본 도쿄 동북부 해안에서 리히터 규모 9.0의 강진이 발생하였다. 이로 인하여 약 10 m의 지진 해일이 몰려와서 엄청난 인명 피해가 발생하였다. 리히터 규모란 지진의 강도를 나타내는 단위로 진앙에서 100 km 떨어진 지점에서 최대 진폭을 측정하여 계산하는데 이때 로그가 이용된다.

탐구 활동

진앙에서 100 km 떨어진 어느 지점에서 최대 진폭이 I μm인 지진의 리히터 규모 M은 $M=\log_{10} I+c$ (c는 상수)이다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 최대 진폭이 100000 μm일 때, 리히터 규모 M을 구하여 보자. (단, $c=0$)
2. 리히터 규모가 5.0인 지진의 최대 진폭은 리히터 규모가 1.0인 지진의 최대 진폭의 몇 배인지 구하여 보자.

지진의 리히터 규모를 구하는 식에서처럼 일상생활에서는 밑이 10인 로그를 사용하는 경우가 많다.

양수 N에 대하여 10을 밑으로 하는 로그 $\log_{10} N$을 **상용로그**라 하고, 보통 로그의 밑 10을 생략하여

$$\log N$$

과 같이 나타낸다.

보기

(1) $\log 10000=\log_{10} 10^4=4$

(2) $\log 0.01=\log_{10} \dfrac{1}{100}=\log_{10} 10^{-2}=-2$

(3) $\log 10\sqrt{10}=\log_{10} \sqrt{1000}=\log_{10} 10^{\frac{3}{2}}=\dfrac{3}{2}$

문제 1 다음 표를 완성하여라.

N	0.001		1	$\sqrt[3]{10}$	100		1000
$\log N$		-1	0			$\frac{5}{2}$	

이 책의 부록에 있는 상용로그표는 0.01의 간격으로 1.00에서 9.99까지의 수에 대한 상용로그의 값을 반올림하여 소수 넷째 자리까지 나타낸 것이다.

예를 들어 $\log 2.14$의 값은 상용로그표에서 2.1의 행과 4의 열이 만나는 곳에 있는 0.3304이다.

즉, $\log 2.14=0.3304$이다.

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

보기 $\log 2=0.3010$, $\log 2.28=0.3579$

문제 2 상용로그표를 이용하여 다음 값을 구하여라.

(1) $\log 5.23$ (2) $\log 8.82$

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

$814=100\times8.14$임을 이용하여 $\log 814$의 값을 구하여 보자. 또 $\log 0.0814$의 값을 구하여 보자. (단, $\log 8.14$는 0.9106으로 계산한다.)

실생활 문제를 해결하는 과정에서 복잡한 계산이 필요할 때, 상용로그를 이용하면 편리한 경우가 있다.

예제 01

100만 원을 연이율 3 %, 1년마다의 복리로 10년간 예금하였을 때, 원리합계는 대략 얼마인지 상용로그표를 이용하여 구하여라.

원금이 a원, 연이율이 r % 인 예금의 n년 후 복리의 원리합계는 $a\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$원이다.

풀이 10년 후 원리합계는 $100(1+0.03)^{10}=100\times1.03^{10}$(만 원)이다.

1.03^{10}의 값을 구하기 위하여 $\log 1.03^{10}$을 계산하면

상용로그표에서 $\log 1.03=0.0128$이므로

$$\log 1.03^{10}=10\log 1.03=10\times0.0128=0.128$$

상용로그표에서 0.128에 가장 가까운 값을 찾으면

$$\log 1.34=0.1271$$

따라서 $(1.03)^{10}$은 약 1.34이므로 구하는 원리합계는 $100\times1.34=134$(만 원)이다.

답 약 134만 원

문제 3 어느 회사의 영업 이익이 매년 4 %씩 증가하였을 때, 200억의 영업 이익을 거둔 해로부터 10년 뒤의 영업 이익은 대략 얼마인지 상용로그표를 이용하여 구하여라.

실생활

문제 4 세기가 A W(와트)인 전파가 어떤 벽을 투과하여 세기가 B W인 전파로 바뀔 때, 그 벽의 전파 감쇄비를 f dB(데시벨)이라고 하면

$$f=10\log\frac{B}{A}$$

의 관계식이 성립한다고 하자. 전파 감쇄비가 -5 dB인 벽을 투과한 전파의 세기가 1 W일 때, 벽을 투과하기 전 전파의 세기를 구하여라.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

맨눈으로 측정한 별의 등급을 겉보기 등급이라고 한다. 밝기가 l_1, l_2이고 겉보기 등급이 m_1, m_2인 두 별에 대하여 다음과 같은 등식이 성립한다고 하자.

$$m_2-m_1=-2.5\log\frac{l_2}{l_1}$$

밤하늘에 가장 밝게 보이는 별인 시리우스의 겉보기 등급은 -1.4이고, 북극성의 겉보기 등급은 2.5이다. 시리우스의 밝기는 북극성의 밝기의 약 몇 배인지 구하여라.

(단, $\log 36.3=1.56$으로 계산한다.)

1 다음 등식을 로그를 사용하여 나타내어라.

01 로그의 뜻과 성질
로그의 뜻

(1) $5^x=7$　　(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=2$

2 다음 값을 구하여라.

01 로그의 뜻과 성질
로그의 성질

(1) $\log_3 1$　　(2) $\log_{27} 3+\log_{27} 9$

(3) $\log_2 \sqrt{3}-\log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$　　(4) $\log_{10} 0.001$

3 다음 식을 간단히 하여라.

01 로그의 뜻과 성질
로그의 성질과 밑의 변환

(1) $\log_3 9\sqrt{3}+\frac{1}{2}\log_3 3$　　(2) $2\log_2 3-\log_2 18$

(3) $\log_9 \frac{1}{3}$　　(4) $\log_3 5\cdot\log_5 81$

4 상용로그표를 이용하여 다음 N의 값을 구하여라.

02 상용로그
상용로그표

(1) $\log 3.09=N$　　(2) $\log 6.15=N$

(3) $\log N=0.3365$　　(4) $\log N=0.6998$

5 외부 자극의 세기 I에 따른 감각의 세기 S는 다음과 같다고 하자.

02 상용로그
상용로그의 활용

$$S=k\log I \ (k\text{는 상수})$$

$k=\frac{1}{6}$일 때, 감각의 세기 $\frac{1}{2}$에 대한 자극의 세기를 구하여라.

1 $x>1$일 때, 다음 등식을 만족시키는 실수 x의 값을 구하여라.

(1) $\log_9 x=\frac{3}{2}$ (2) $\log_2(\log_3 x)=-1$

01 로그의 뜻과 성질
로그의 뜻

2 $\log_{x-2}(-x^2+6x-5)$의 값이 존재하도록 하는 정수 x를 구하여라.

01 로그의 뜻과 성질
로그의 뜻

3 $\log_5 3=a$, $\log_5 7=b$라고 할 때, 다음을 a, b로 나타내어라.

(1) $\log_5 \frac{7}{3}$ (2) $\log_5 \sqrt[3]{63}$

(3) $\log_3 7$ (4) $\log_7 21$

01 로그의 뜻과 성질
로그의 성질과 밑의 변환

4 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $3\log_2 \sqrt[3]{12}+\log_2 \frac{4}{3}$

(2) $2\log_3 3\sqrt{2}-\log_3 \frac{4}{27}+\frac{1}{3}\log_3 216$

(3) $\log_2 12-\log_4 \frac{9}{2}$

(4) $\log_{\frac{1}{3}} 16+\log_3 48$

01 로그의 뜻과 성질
로그의 성질

5 다음은 상용로그를 이용하여 1.05^{40}의 값을 구하는 과정이다. $\square$ 안에 알맞은 수를 써넣어라.

1.05^{40}의 값을 구하기 위해 먼저 1.05^{40}의 상용로그 $\log 1.05^{40}$을 계산한다.
상용로그표에서 $\log 1.05=\square$이므로
$$\log 1.05^{40}=\square\ \log 1.05=\square$$
상용로그표에서 $\log \square=0.8482$이므로 1.05^{40}은 약 7.05임을 알 수 있다.

02 상용로그
상용로그의 활용

[해답 p.235]

중단원 실력

1 $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$일 때, $\log_2(a^3-1)-\log_2(a^2+a+1)$의 값을 구하여라.

01 로그의 뜻과 성질
로그의 성질

2 $2^x=9^y=18^z$일 때, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}$의 값을 구하여라. (단, $xyz\neq0$)

01 로그의 뜻과 성질
로그의 성질

3 이차방정식 $x^2-8x+2=0$의 두 근이 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$일 때, $\log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha$의 값을 구하여라.

01 로그의 뜻과 성질
로그의 성질

4 $\log\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\log\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\log\left(1-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\log\left(1-\dfrac{1}{100}\right)$의 값을 구하여라.

02 상용로그

5 셀로판으로 코팅된 어떤 유리 1장을 빛이 통과할 때마다 그 밝기가 처음의 20 %씩 줄어든다고 하자. 빛의 밝기가 처음의 25 %가 되려면 몇 장의 유리를 통과시켜야 하는지 구하여라.

(단, $\log 0.8=-0.1$, $\log 0.25=-0.6$으로 계산한다.)

02 상용로그
상용로그의 활용

수행 과제

소리의 크기

데시벨(dB)은 소리의 상대적인 크기를 나타내는 단위로, 기차의 경적 소리는 약 120 dB이고 일상적인 대화는 약 60 dB이다. 여기서 120 dB은 60 dB보다 얼마나 강한 소리일까?

기차의 경적 소리(120 dB)

일상적인 대화(60 dB)

소리의 세기 I W/m^{2}와 데시벨 D dB의 관계는 다음과 같다.

$$D=10\log\frac{I}{I_0}$$

여기서 표준음의 세기 I_0 W/m^{2}는 정상적인 사람이 들을 수 있는 가장 작은 소리로, $I_0=10^{-12}$이다.

| 과 제 | 1 다음은 소리의 종류에 따른 소리의 세기를 조사한 것이다. 빈칸에 알맞은 수를 써넣어 보자.

소리의 종류	I(W/m^2)	$\frac{I}{I_0}$	D(dB)
표준음	10^{-12}		
일상적인 대화	10^{-6}		
번화가의 소음	10^{-5}		
기차의 경적 소리	10^{0}		

| 과 제 | 2 120 dB인 소리의 세기는 60 dB인 소리의 세기의 몇 배인지 계산하여 보자.

| 과 제 | 3 소음 측정기를 이용하여 교실 내 소리는 몇 dB인지 측정하고, 그 소리의 세기는 표준음의 세기의 몇 배인지 계산하여 보자.

대단원 학습 내용 정리

1 지수

거듭제곱근

(1) 거듭제곱근

n이 2 이상의 자연수일 때 n제곱하여 실수 a가 되는 수, 즉

$$x^n=a$$

를 만족시키는 수 x를 a의 n제곱근이라고 한다.

(2) a의 실수인 n제곱근

n이 2 이상의 자연수일 때

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.

거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때

(1) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

(2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

(3) $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

(4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

지수의 확장과 지수법칙

(1) 정수 지수와 유리수 지수의 정의

(i) $a\neq0$이고 n이 양의 정수일 때

$$a^0=1,\ a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

(ii) $a>0$이고 m, n $(n\geq2)$이 정수일 때

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\ \text{특히 } a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

(2) 지수법칙

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때

(i) $a^xa^y=a^{x+y}$

(ii) $(a^x)^y=a^{xy}$

(iii) $(ab)^x=a^xb^x$

(iv) $a^x\div a^y=a^{x-y}$

2 로그

로그의 정의

$a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때, $a^x=N$을 만족시키는 실수 x는 오직 하나 존재한다.

이때 x를 $x=\log_a N$으로 나타내고, a를 밑으로 하는 N의 로그라고 한다.

$$a^x=N \iff x=\log_a N$$

로그의 성질

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때

(1) $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

(2) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

(3) $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

(4) $\log_a N^k=k\log_a N$ (k는 실수)

로그의 밑의 변환

a, b, c는 양수이고 $a\neq1$, $c\neq1$일 때

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

상용로그

양수 N에 대하여 10을 밑으로 하는 로그 $\log_{10} N$을 상용로그라 하고, 보통 밑 10을 생략하여

$$\log N$$

과 같이 나타낸다.

용어와 기호 거듭제곱근, (로그의) 밑, 로그, 진수, 상용로그, $\sqrt[n]{a}$, $\log_a N$, $\log N$

대/단/원 평가 문제

선택형

1 16의 네제곱근 중에서 실수인 것들을 모두 곱한 값은?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

2 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{2}$ ② $\dfrac{\sqrt[5]{20}}{\sqrt[5]{5}}=\sqrt[5]{4}$
③ $(\sqrt[6]{8})^2=2$ ④ $\sqrt[3]{\sqrt{2}}=\sqrt[6]{2}$
⑤ $\sqrt[4]{27}\times\sqrt{\sqrt{3}}=3$

3 $\sqrt[4]{a}=81$, $\sqrt[6]{b}=16$일 때, $\sqrt[8]{ab}$의 값은?

① 24 ② 36 ③ 48
④ 60 ⑤ 72

4 $a>0$에 대하여 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=3$일 때, $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}$의 값은?

① 6 ② 9 ③ 12
④ 15 ⑤ 18

5 $\log_x(-x^2+4x)$의 값이 존재하도록 하는 모든 정수 x의 합은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

6 $2^x=3^y=36$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $\dfrac{x+y}{xy}$의 값은?

① $\dfrac{1}{8}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 5

7 $\dfrac{3}{2}\log_3 2-\log_3\sqrt{6}+\log_3\sqrt{3}$을 간단히 하면?

① $-\log_3 2$ ② $1-\log_3 2$
③ $\log_3 2$ ④ 1
⑤ $1+\log_3 2$

8 $\log_5 2=a$, $\log_5 3=b$라고 할 때, $\log_5\sqrt{24}$를 a, b로 나타내면?

① $\dfrac{a-b}{2a}$ ② $\dfrac{2a-b}{a+b}$ ③ $\dfrac{3a+b}{2}$
④ $\dfrac{a+2b}{2}$ ⑤ $\dfrac{a-3b}{2(1-a)}$

[해답 p.235]

9 세 수 $A=2^{\log_9 3}$, $B=\log_3 3\sqrt{3}$, $C=\log_4 8$ 사이의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A>B=C$ ② $B>C>A$ ③ $A=B>C$
④ $B=C>A$ ⑤ $C>A=B$

10 $\log 3.14=a$라고 할 때, $\log\sqrt{31.4}$의 값은?

① $\dfrac{a-1}{2}$ ② $\dfrac{a+1}{2}$ ③ $\dfrac{a}{2}+1$
④ $2a-1$ ⑤ $2a+1$

11 $\log(\log_2 3)+\log(\log_3 4)+\log(\log_4 5)+\cdots+\log(\log_{63} 64)$를 간단히 하면?

① $\log 3$ ② $\log 4$ ③ $\log 5$
④ $\log 6$ ⑤ $\log 7$

서답형

12 $5^{\sqrt{32}}\div 5^{\sqrt{50}}\times 5^{\sqrt{8}}$의 값을 구하여라.

13 $a>0$, $a\neq 1$일 때, $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}=a^k$을 만족시키는 상수 k의 값을 구하여라.

14 $\log_2(a+b)=3$, $\log_2 ab=2$일 때, a^2+b^2의 값을 구하여라.

15 두 양수 a, b에 대하여 $a^3b^2=1$일 때, $\log_a ab^4$의 값을 구하여라. (단, $a\neq 1$)

|서술형|

16 $10^{0.8}$의 값을 상용로그표를 이용하여 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

|서술형|

17 어떤 전자레인지로 피자를 데울 때, 피자 조각의 개수 n과 데우는 데 걸리는 시간 t분 사이에는

$$t=1.2\times n^{\frac{1}{2}}$$

의 관계가 성립한다고 하자. 피자 16조각을 데우는 데 걸리는 시간은 피자 2조각을 데우는 데 걸리는 시간의 몇 배인지 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

M+ Engineering

수 학 + 공 학

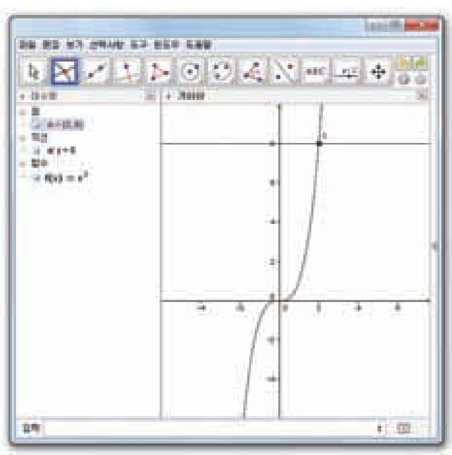
컴퓨터로 거듭제곱근을 구하여 보자.

기하 작도용 소프트웨어를 이용하여 함수의 그래프를 그리고 거듭제곱근을 구하여 보자. 그래프를 이용하면 거듭제곱근의 여러 가지 성질도 확인할 수 있다.

1 \ 8의 세제곱근을 구하여 보자.

❶ 입력창에 '$y=x$^3' 을 입력한 다음, Enter↵ 키를 누르고, 다시 '$y=8$' 을 입력하여 Enter↵ 키를 누르면 두 함수 $y=x^3$, $y=8$의 그래프가 한 화면에 그려진다.

❷ 아이콘 [icon] 에서 ▽를 클릭하여 '두 대상의 교점 [icon] ' 을 선택하고 $y=x^3$과 $y=8$의 두 그래프를 클릭하면 다음 그림과 같이 대수창과 기하창에 두 그래프의 교점의 좌표 $(2,\ 8)$이 나타난다. 따라서 8의 세제곱근 중 실수인 것은 2임을 알 수 있다.



로그의 탄생과 활용

천문학에서 다루는 수는 매우 커서 복잡한 계산이 필요한데, 과거에는 컴퓨터와 같은 공학적 도구가 없었으므로 일일이 계산할 수밖에 없었다. 측량할 때 계산을 도와주는 것은 삼각함수표가 고작이었고 계산 단계도 복잡하였다.

네이피어

이런 과정에서 탄생한 것이 스코틀랜드의 수학자 네이피어(Napier, J. ; 1550～1617)가 창안한 로그이다.

로그를 이용하면 곱셈을 덧셈으로, 나눗셈을 뺄셈으로 바꿔 주기 때문에 큰 수를 계산할 때 편리하다. 또한 아무리 큰 수도 로그로 계산하면 그 값은 얼마 되지 않는다. 예를 들어 1억의 상용로그 값도 8로 작아진다.

프랑스의 수학자 라플라스(Laplace, P. S. ; 1749～1827)는 "로그의 발명으로 천문학자의 수명이 두 배로 연장되었다."라고 했는데, 이는 천문학 계산에서 로그가 차지하는 비중이 얼마나 큰지를 단적으로 보여 주는 예이다.

로그는 이와 더불어 여러 분야의 단위에서 사용되고 있다. 지진의 강도를 나타내는 리히터 규모와 소리의 세기인 데시벨(dB), 산성도를 나타내는 pH, 별의 밝기인 등성 등은 모두 로그를 사용하는 단위의 예이다.

이렇듯 학문의 필요에 의해 단순한 계산 도구로 창안된 로그는 다양한 분야에서 많은 사람들에게 혜택을 주고 있다.

수 학 + 역 사

M+ History

부 록

Ⅰ 집합과 명제

|준|비|학|습| [p.11]

1 (1) 희수, 동준, 경환, 병진 (2) 5월, 9월

2 (1) $x=3$ 또는 $x=-3$ (2) $x=4$ 또는 $x=-1$
(3) $x\le -2$ 또는 $x\ge 2$ (4) $-4<x<2$

3 (1) $\sqrt{3}+1>2$ (2) $\sqrt{3}+2<\sqrt{6}+\sqrt{3}$
(3) $\sqrt{2}+1<4-\sqrt{2}$ (4) $4-\sqrt{5}>\sqrt{5}-1$

1 집합

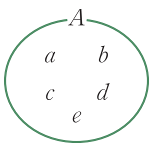
01 집합의 뜻과 표현 [p.13~17]

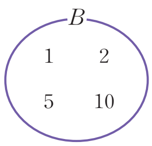
탐구 활동
1 대한민국, 일본, 중국
2 가나, 뉴질랜드, 중국
3 정할 수 없다.

1 (1) 집합이고, 원소는 1, 3, 5, 15이다.
(2) 집합이 아니다.
(3) 집합이 아니다.
(4) 집합이고, 우리 반 학생 중에서 3월에 태어난 학생이 원소이다.

2 (1) $\in$ (2) $\not\in$ (3) $\in$ (4) $\not\in$

탐구 활동
1 대금, 단소
2 사물놀이에 쓰이는 악기 또는 타악기들의 모임 등

3 (1)


(2)


탐구 활동
1 4장
2 모두 만들 수는 없다.
3 만들 수 없다.

4 (1) $n(A)=2$ (2) $n(B)=6$
(3) $n(C)=14$ (4) $n(D)=0$

사고력 기르기

집합 $\{0\}$은 원소가 0인 집합이고 공집합 $\varnothing$은 집합의 원소가 하나도 없는 집합이다. 따라서 집합 $\{0\}$의 원소의 개수는 1이고 공집합 $\varnothing$의 원소의 개수는 0이다.

|단원 과제|

생선 코너에 있는 상품은 집합
{오징어, 고등어, 갈치, 조개, 낙지, 새우}
와 같이 나타낼 수 있고, 과일 코너에 있는 상품은 집합
{사과, 배, 감, 귤, 딸기, 오렌지}
와 같이 나타낼 수 있다.

02 집합 사이의 포함 관계 [p.18~21]

탐구 활동
1 $A=${가사실, 독서실}
$B=${가사실, 독서실, 과학실, 영어실, 음악실, 미술실}
2 집합 A의 모든 원소는 집합 B에 속한다.

1 (1) $\subset$ (2) $\not\subset$ (3) $\subset$ (4) $\not\subset$

2 ㉠, ㉢, ㉣

3 (1) $\varnothing$, {비}, {눈}, {비, 눈}
(2) $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$

탐구 활동
1 $A=${범퍼카, 청룡열차, 바이킹}
$B=${청룡열차, 범퍼카, 바이킹}
2 집합 A의 모든 원소는 집합 B에 속하고, 집합 B의 모든 원소는 집합 A에 속한다.

4 (1) $\neq$ (2) $=$ (3) $\neq$ (4) $=$

5 (1) A는 B의 진부분집합이다.
(2) A는 B의 진부분집합이 아니다.

03 집합의 연산 [p. 22~32]

탐구 활동

1 개, 토끼, 앵무새, 고양이, 열대어

2 개, 토끼

1 (1) $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $A\cap B=\{3,\ 4\}$
(2) $A\cup B=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 10\}$, $A\cap B=\{1,\ 2\}$
(3) $A\cup B=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$, $A\cap B=\{c\}$
(4) $A\cup B=\{2,\ 4,\ 6\}$, $A\cap B=\varnothing$
두 집합 A, B가 서로소인 것은 (4)이다.

사고력 기르기

임의의 두 집합 A, B에 대하여 A는 $A\cup B$에 포함되고, $A\cap B$는 A에 포함된다.
즉, $A\subset A\cup B$, $A\cap B\subset A$이다.

2 (1) 9 (2) 3

3 27명

탐구 활동

1 사과, 배, 오렌지 **2** 오렌지

4 (1) $A^C=\{1,\ 3,\ 5\}$ (2) $B^C=\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$
(3) $C^C=\{6\}$ (4) $D^C=\varnothing$

탐구 활동

1 구두, 슬리퍼 **2** 공, 모자

5 (1) $A-B=\{1\}$, $B-A=\{7,\ 9\}$
(2) $A-B=\{2,\ 6\}$, $B-A=\{5,\ 15\}$

6 (1) $\{2,\ 4\}$ (2) $\{2,\ 4\}$

탐구 활동

1 $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$
$B\cup A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$
따라서 $A\cup B=B\cup A$이다.

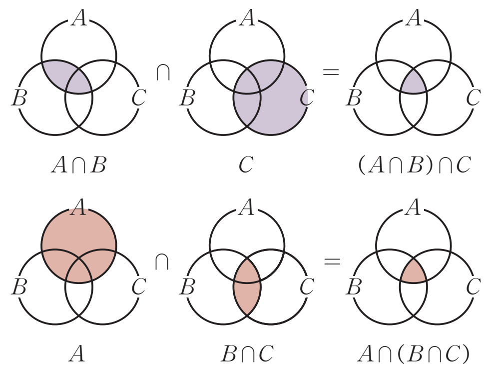
2 $A\cap B=\{4,\ 5\}$, $B\cap A=\{4,\ 5\}$
따라서 $A\cap B=B\cap A$이다.

사고력 기르기

집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속하면 $A-B$의 원소는 하나도 없다. 즉, $A\subset B$이면 $A-B=\varnothing$이다.

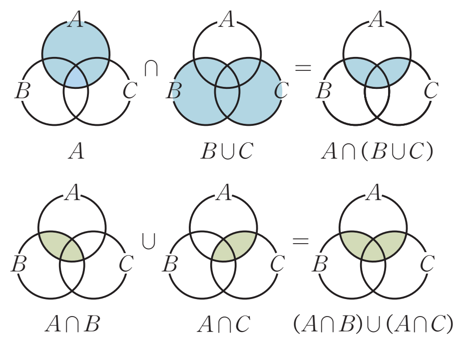
7 (1) $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B\cup A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
이므로 $A\cup B=B\cup A$
(2) $A\cap B=\{2,\ 3\}$, $B\cap A=\{2,\ 3\}$이므로
$A\cap B=B\cap A$

8



따라서 $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$가 성립한다.

9



따라서 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$가 성립한다.

10 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$
$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30\}$
$C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$
(1) $A\cup(B\cap C)$
$=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}\cup\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6\}$
$=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 9,\ 18\}$
$(A\cup B)\cap(A\cup C)$
$=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10,\ 15,\ 18,\ 30\}$
$\cap\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 18\}$
$=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 9,\ 18\}$

따라서 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$가 성립한다.

(2) $A\cap(B\cup C)$

$=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18\}$

$\quad\cap\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 15,\ 30\}$

$=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9\}$

$(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}\cup\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9\}$

$=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9\}$

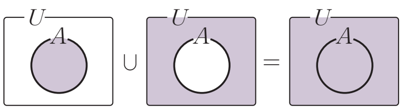
따라서 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$가 성립한다.

탐구 활동

1 $A-B=A\cap B^C$ **2** $(A^C)^C=A$

3 $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$ **4** $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

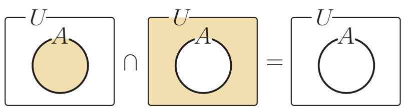
11 (1)



A A^c $A\cup A^c$

따라서 $A\cup A^C=U$가 성립한다.

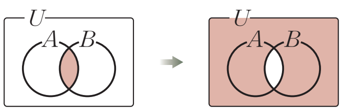
(2)



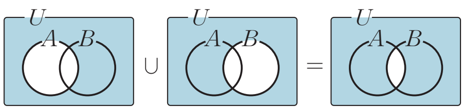
A A^c $A\cap A^c$

따라서 $A\cap A^C=\varnothing$이 성립한다.

12



$A\cap B$ $(A\cap B)^c$



A^c B^c $A^c\cup B^c$

따라서 $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$이 성립한다.

13 (1) $A\cup(A\cap B)^C$

$=A\cup(A^C\cup B^C)$ (드모르간의 법칙)

$=(A\cup A^C)\cup B^C$ (결합법칙)

$=U\cup B^C$ (여집합의 성질)

$=U$

(2) $A-(A-B)$

$=A-(A\cap B^C)$ (차집합의 성질)

$=A\cap(A\cap B^C)^C$ (차집합의 성질)

$=A\cap\{A^C\cup(B^C)^C\}$ (드모르간의 법칙)

$=A\cap(A^C\cup B)$ (여집합의 성질)

$=(A\cap A^C)\cup(A\cap B)$ (분배법칙)

$=\varnothing\cup(A\cap B)$ (여집합의 성질)

$=A\cap B$

중단원 기초 [p. 33]

1 ㉠, ㉢ **2** ㉠, ㉣

3 $\varnothing$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{4,\ 5\}$ **4** 7

5 (1) $\{4,\ 6\}$ (2) $\{4,\ 6\}$

(3) $\{1,\ 2,\ 4,\ 6\}$ (4) $\{1,\ 2,\ 4,\ 6\}$

같은 집합은 (1)과 (2), (3)과 (4)이다.

중단원 기본 [p. 34]

1 ㉠, ㉢ **2** $\{a\}$, $\{a,\ b\}$, $\{a,\ c\}$

3 5명 **4** $\{2,\ 3,\ 5\}$

5 (1) $\varnothing$ (2) $A\cup B^C$

(3) $\varnothing$ (4) U

중단원 실력 [p. 35]

1 $n(X)=6$, $n(Y)=7$ **2** 8개

3 $a=4$, $b=6$ **4** 11명

5 $(A\cup B)\cap\{C\cup(A^C\cap B^C)\}$

$=(A\cup B)\cap\{C\cup(A\cup B)^C\}$ (드모르간의 법칙)

$=\{(A\cup B)\cap C\}\cup\{(A\cup B)\cap(A\cup B)^C\}$ (분배법칙)

$=\{(A\cup B)\cap C\}\cup\varnothing$ (여집합의 성질)

$=(A\cup B)\cap C$

2 명제

01 명제와 증명 [p.37~41]

탐구 활동

1 ㄱ, ㄷ **2** ㄹ **3** ㄴ

1 (1) 명제가 아니다. (2) 참인 명제
(3) 거짓인 명제

2 (1) 가정: $x^2 \le 4$
결론: $-2 \le x \le 2$
(2) 가정: 두 수 a, b는 자연수이다.
결론: $a+b$는 자연수이다.

3 (1) 가정: 삼각형 ABC는 정삼각형이다.
결론: 삼각형 ABC의 세 내각의 크기는 같다.
(2) 가정: 함수 $f(x)=(x-3)^2+2$이다.
결론: 함수 f의 최솟값은 2이다.

탐구 활동

1 눈의 뜻을 분명하게 설명하지 않아서이다.

2 배, 발 등

4 (1) 두 도형이 모양과 크기가 같아서 완전히 포개어지는 것
(2) 눈금 없는 자와 컴퍼스만을 사용하여 도형을 그리는 것
(3) 한 내각이 직각인 삼각형
(4) 네 변의 길이가 모두 같고, 네 내각의 크기가 모두 같은 사각형

5 90°, 90°, $\overline{PM}$, $\triangle$PBM

02 조건과 진리집합 [p.42~48]

탐구 활동

1 ②

2 자라, 문어, 상어, 갈치

3 '문어는 바다 동물이 아니다.'라고 하면 거짓이 된다.

1 (1) 조건 (2) 명제 (3) 명제 (4) 조건

2 (1) 2는 4의 배수가 아니다. (참)
(2) $2+3 \le 4$ (거짓)
(3) $\sqrt{3}$은 무리수가 아니다. (거짓)
(4) $1^2+2^2 \ne 3^2$ (참)

3 (1) $x \ne 2$ (2) x는 2의 배수가 아니다.
(3) $x>3$ (4) x는 5의 약수이다.

사고력 기르기

'x는 짝수이다.'의 부정은 'x는 짝수가 아니다.'이다. 예를 들어 '$\frac{1}{2}$은 짝수이다.'는 거짓인 명제이지만 '$\frac{1}{2}$은 짝수가 아니다.'는 참인 명제이다. 그러나 'x는 짝수이다.'의 부정을 'x는 홀수이다.'라고 한다면 '$\frac{1}{2}$은 짝수이다.'도 거짓이고, 이 명제의 부정인 '$\frac{1}{2}$은 홀수이다.'도 거짓이므로 모순이다. 따라서 'x는 짝수이다.'의 부정은 'x는 홀수이다.'가 아니고, 'x는 짝수가 아니다.'이다.

탐구 활동

1 {호랑이, 침팬지, 사슴} **2** {벌새, 타조}

3 {호랑이, 침팬지, 무당벌레, 사슴, 귀뚜라미, 메뚜기}

4 (1) p의 진리집합: $\{2,\ 3\}$
$\sim p$의 진리집합: $\{0,\ 1,\ 4\}$
(2) q의 진리집합: $\{0,\ 1\}$
$\sim q$의 진리집합: $\{2,\ 3,\ 4\}$

5 (1) 거짓 (2) 참 (3) 거짓 (4) 거짓

6 (1) 참 (2) 참 (3) 참 (4) 참

창의 up

2는 짝수인 소수이다. 따라서 다음과 같이 명제를 만들고, 그것의 참, 거짓을 판별할 수 있다.

- x가 홀수이면 x는 소수이다. (거짓)
- x가 홀수이면 x는 소수가 아니다. (거짓)
- x가 소수이면 x는 홀수이다. (거짓)
- x가 소수이면 x는 홀수가 아니다. (거짓)
- x가 홀수가 아니면 x는 소수이다. (거짓)
- x가 홀수가 아니면 x는 소수가 아니다. (거짓)
- x가 소수가 아니면 x는 홀수이다. (거짓)
- x가 소수가 아니면 x는 홀수가 아니다. (거짓)

탐구 활동

1 $P=\{1, 2, 3, 4\}$ **2** $Q=\{2, 4\}$

3 $R=\varnothing$ **4** $P=U$, $R=\varnothing$

7 (1) 참 (2) 거짓

8 (1) 어떤 자연수 x에 대하여 $x\le 2$이다. (참)
(2) 모든 자연수 x에 대하여 $x=1$이다. (거짓)

9 (1) 어떤 이등변삼각형은 정삼각형이 아니다. (참)
(2) 어떤 8의 배수는 2의 배수가 아니다. (거짓)
(3) 모든 평행사변형은 정사각형이 아니다. (거짓)
(4) 모든 각은 직각이 아니다. (거짓)

03 명제의 역과 대우 [p. 49~53]

탐구 활동

1 (1) x가 4의 배수이면 x는 2의 배수이다.
(2) x가 2의 배수이면 x는 4의 배수이다.
(3) x가 2의 배수가 아니면 x는 4의 배수가 아니다.

2 (1) 참 (2) 거짓 (3) 참

1 (1) 역: 5의 약수는 10의 약수이다. (참)
대우: 5의 약수가 아니면 10의 약수가 아니다. (거짓)
(2) 역: $x>2$이면 $(x-2)(x+2)>0$이다. (참)
대우: $x\le 2$이면 $(x-2)(x+2)\le 0$이다. (거짓)
(3) 역: 이등변삼각형은 정삼각형이다. (거짓)
대우: 이등변삼각형이 아니면 정삼각형이 아니다. (참)

2 역: $a+b$가 무리수이면 a와 b가 무리수이다. (거짓)
대우: $a+b$가 무리수가 아니면 a 또는 b가 무리수가 아니다. (거짓)

3 (1) 주어진 명제의 대우는
'자연수 n에 대하여 n이 3의 배수가 아니면 n^2도 3의 배수가 아니다.'
자연수 n이 3의 배수가 아니면 $n=3k-1$ 또는 $n=3k-2$ (k는 자연수)로 나타낼 수 있으므로
$n^2=(3k-1)^2=3(3k^2-2k+1)-2$
또는 $n^2=(3k-2)^2=3(3k^2-4k+2)-2$
이때 $3k^2-2k+1$과 $3k^2-4k+2$는 자연수이므로 n^2은 3의 배수가 아니다.
따라서 자연수 n에 대하여 n^2이 3의 배수이면 n도 3의 배수이다.
(2) 주어진 명제의 대우는
'자연수 a, b에 대하여 a와 b가 홀수이면 ab도 홀수이다.'
자연수 a, b가 홀수이면 $a=2k-1$, $b=2m-1$ (k, m은 자연수)로 나타낼 수 있으므로
$ab=(2k-1)(2m-1)$
$\quad=2(2km-k-m+1)-1$
이때 $2km-k-m+1$이 자연수이므로 ab는 홀수이다.
따라서 자연수 a, b에 대하여 ab가 짝수이면 a 또는 b가 짝수이다.

사고력 기르기

천재는 악필이다.
역: 악필이면 천재이다.
대우: 악필이 아니면 천재가 아니다.

탐구 활동

1 짝수, 약수, 소수, 짝수

4 (i) a, b가 모두 짝수, 즉 $a=2m$, $b=2n$ (m, n은 자연수)이라고 하면
$ab=2m\times 2n=2(2mn)$
ab는 짝수가 되므로 가정에 모순이다.
(ii) a, b 중에서 하나만 짝수인 경우 중에서 a가 짝수, 즉 $a=2m$, $b=2n-1$ (m, n은 자연수)이라고 하면
$ab=2m\times(2n-1)=2m(2n-1)$
ab는 짝수가 되므로 가정에 모순이다.
b가 짝수일 때에도 마찬가지이다.
따라서 '자연수 a, b에 대하여 ab가 홀수이면 a, b는 모두 홀수이다.'는 참이다.

| 단원 과제 |

A는 범인이거나 범인이 아니거나 둘 중 하나이다.
만일 A가 범인이 아니라면 ㄹ에 의하여 D도 범인이 아니다. 그러나 ㄱ에서 D가 범인이 아니면 A는 범인이라고 했

으므로 모순이다. 따라서 A는 범인이다.
그런데 ㄴ으로부터 A가 범인이면 B도 범인이다. 또 ㄷ의 대우로부터 B가 범인이면 C는 범인이 아니다.
ㄹ에서 C가 범인이 아니면 D도 범인이 아니라고 했으므로 D는 범인이 아니다.
따라서 범인은 A와 B이다.

04 필요조건과 충분조건 [p. 54~55]

탐구 활동

1 생략 **2** $R\subset Q\subset P$

3 조건 p가 반드시 참인 명제가 되어야 한다.

1 (1) 필요조건 (2) 충분조건

2 필요충분조건

창의 up

조건 p에서 세 절댓값의 합이 0이 되는 경우는 각각의 절댓값들이 0일 때뿐이다.
이때 $a=0$이면 $|ab|+|bc|+|ca|=|bc|=0$이므로 $b=0$ 또는 $c=0$이어야 한다.
또한 $b=0$인 경우와 $c=0$인 경우도 마찬가지이다.
따라서 a, b, c 중에서 두 개 이상이 0이므로 $p\Longrightarrow q$이다.
한편 a, b, c 중에서 두 개 이상이 0이면
$|ab|+|bc|+|ca|=0$이므로 $q\Longrightarrow p$
그러므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.

05 절대부등식 [p. 56~58]

탐구 활동

1 $<$

2 주어진 부등식은 항상 성립한다고 말할 수 있다.

1 ㉠, ㉢

2 (1) $a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\ge 0$
따라서 $a^2+ab+b^2\ge 0$이다.
여기서 등호는 $a+\frac{b}{2}=0$, $b=0$, 즉 $a=b=0$일 때 성립한다.

(2) $4a^2-4ab+3b^2=(2a-b)^2+2b^2\ge 0$
따라서 $4a^2-4ab+3b^2\ge 0$이다.
여기서 등호는 $2a-b=0$, $b=0$, 즉 $a=b=0$일 때 성립한다.

3 (1) $2(a^2+b^2)-(a+b)^2$
$=(2a^2+2b^2)-(a^2+2ab+b^2)$
$=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2\ge 0$
따라서 $2(a^2+b^2)\ge(a+b)^2$이다.
여기서 등호는 $a=b$일 때 성립한다.

(2) $(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$
$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$
$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$
그런데 $(a-b)^2\ge 0$, $(b-c)^2\ge 0$, $(c-a)^2\ge 0$이므로
$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\ge 0$
따라서 $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$이다.
여기서 등호는 $a=b=c$일 때 성립한다.

4 $\sqrt{ab}-\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)\sqrt{ab}-2ab}{a+b}$
$=\frac{\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b}$
$=\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}$
그런데 $a>0$, $b>0$일 때, $a+b>0$이므로
$\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b}\ge 0$
따라서 $\sqrt{ab}\ge\frac{2ab}{a+b}$이다.
여기서 등호는 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, 즉 $a=b$일 때 성립한다.

5 $|a|-|b|\le|a-b|$에서 $|a|\le|a-b|+|b|$
$|a|\ge 0$, $|a-b|+|b|\ge 0$이므로
$|a|^2\le(|a-b|+|b|)^2$임을 보이면 된다.
$(|a-b|+|b|)^2-|a|^2=2\{|ab-b^2|-(ab-b^2)\}$
그런데 $|ab-b^2|\ge ab-b^2$이므로
$2\{|ab-b^2|-(ab-b^2)\}\ge 0$
따라서 $|a|^2\le(|a-b|+|b|)^2$이므로
$|a|\le|a-b|+|b|$, $|a|-|b|\le|a-b|$
여기서 등호는 $ab-b^2\le 0$, 즉 $a\le b\le 0$ 또는 $0\le b\le a$일 때 성립한다.

사고력 기르기

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)=1+\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}+4=5+\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}$$
$$\geq 5+2\sqrt{\frac{4a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=5+2\sqrt{4}=9$$

따라서 구하는 최솟값은 9이다.

중단원 기초 [p. 59]

1 (1) 마름모 (2) 맞꼭지각 (3) 정다각형 (4) 원

2 (1) 명제, 부정: $3\geq 4$
(2) 조건, 부정: $2x\neq 5$
(3) 명제, 부정: 6은 3의 약수가 아니다.
(4) 조건, 부정: x는 허수가 아니다.

3 (1) 역: 12의 약수는 6의 약수이다.
대우: 12의 약수가 아니면 6의 약수도 아니다.
(2) 역: 복소수이면 실수이다.
대우: 복소수가 아니면 실수가 아니다.
(3) 역: $x=0$이면 $x^2=3x$이다.
대우: $x\neq 0$이면 $x^2\neq 3x$이다.
(4) 역: $x^2-5x+6<0$이면 $x<3$이다.
대우: $x^2-5x+6\geq 0$이면 $x\geq 3$이다.

4 (1) 필요조건 (2) 충분조건
(3) 필요충분조건 (4) 필요조건

5 $(x^2+y^2)-2xy=x^2-2xy+y^2=(x-y)^2\geq 0$
따라서 $x^2+y^2\geq 2xy$이다.
여기서 등호는 $x-y=0$, 즉 $x=y$일 때 성립한다.

중단원 기본 [p. 60]

1 (1) 부정: x는 10의 약수이다.
진리집합: $\{1, 2, 5, 10\}$
(2) 부정: $x^2-1\neq 0$
진리집합: $\{2, 3, 4, \cdots\}$
(3) 부정: $|x-3|\geq 4$
진리집합: $\{7, 8, 9, \cdots\}$
(4) 부정: $x^2+x-2<0$
진리집합: $\varnothing$

2 (1) 역: 10의 약수는 5의 약수이다. (거짓)
대우: 10의 약수가 아니면 5의 약수가 아니다. (참)
(2) 역: $a^2<1$이면 $a<1$이다. (참)
대우: $a^2\geq 1$이면 $a\geq 1$이다. (거짓)
(3) 역: 홀수는 홀수의 제곱이다. (거짓)
대우: 홀수가 아닌 수는 홀수의 제곱이 아니다. (참)
(4) 역: $a=0$이면 $ax=0$이다. (참)
대우: $a\neq 0$이면 $ax\neq 0$이다. (거짓)
(5) 역: 사다리꼴은 마름모이다. (거짓)
대우: 사다리꼴이 아니면 마름모가 아니다. (참)

3 ㄴ, ㄷ, ㄹ

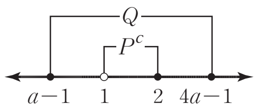
4 3

5 (1) $a^3+b^3-ab(a+b)$
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)$
$=(a+b)(a^2-2ab+b^2)$
$=(a+b)(a-b)^2$
그런데 $a>0$, $b>0$일 때, $a+b>0$이므로
$(a+b)(a-b)^2\geq 0$
따라서 $a^3+b^3\geq ab(a+b)$이다.
여기서 등호는 $a=b$일 때 성립한다.
(2) $\left(1+\frac{a}{2}\right)^2-(\sqrt{1+a})^2=\left(1+a+\frac{a^2}{4}\right)-(1+a)$
$=\frac{a^2}{4}>0$
따라서 $\left(1+\frac{a}{2}\right)^2>(\sqrt{1+a})^2$이므로
$1+\frac{a}{2}>\sqrt{1+a}$

중단원 실력 [p. 61]

1 (1) 어떤 실수 x의 제곱은 0보다 작거나 같다. (참)
(2) 모든 소수는 홀수이다. (거짓)
[반례] 2는 소수이지만 짝수이다.

2 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면 $P^C \subset Q$
$\sim p$: $1<x\le 2$이므로 $P^C=\{x|1<x\le 2\}$
$x^2-(5a-2)x+4a^2-5a+1$
$=\{x-(a-1)\}\{x-(4a-1)\}$이므로
조건 q는 $a\ge 0$일 때 $a-1\le x\le 4a-1$이고,
$a<0$일 때 $4a-1\le x\le a-1$이다.
(i) $a\ge 0$일 때, $Q=\{x|a-1\le x\le 4a-1\}$
오른쪽 그림에서
$a-1\le 1$, $4a-1\ge 2$이므로 $a\le 2$, $a\ge \frac{3}{4}$



따라서 $\frac{3}{4}\le a\le 2$이다.
(ii) $a<0$일 때, (i)과 같은 방법으로
$4a-1\le 1$, $a-1\ge 2$이므로 $a\le \frac{1}{2}$, $a\ge 3$
따라서 a의 값은 존재하지 않는다.
(i), (ii)에 의하여 $\frac{3}{4}\le a\le 2$

3 (i) a, b가 모두 짝수,
즉 $a=2m$, $b=2n$ (m, n은 자연수)이라고 하면
$a+b=2m+2n=2(m+n)$
$a+b$는 짝수가 되므로 가정에 모순이다.
(ii) a, b가 모두 홀수,
즉 $a=2m-1$, $b=2n-1$ (m, n은 자연수)이라고 하면
$a+b=(2m-1)+(2n-1)=2(m+n-1)$
$a+b$는 짝수가 되므로 가정에 모순이다.
따라서 'a, b가 양의 정수일 때, $a+b$가 홀수이면 a, b 중 하나는 홀수이고, 다른 하나는 짝수이다.'는 참이다.

4 $P\cap Q=P$이면 $P\subset Q$이므로 $p \Longrightarrow q$
$Q\cap R=\varnothing$이면 $Q\subset R^C$이므로 $q \Longrightarrow \sim r$
따라서 $p \Longrightarrow \sim r$이므로 p는 $\sim r$이기 위한 충분조건이다.

5 (1) $a=0$, $b>0$
(2) $a=0$, $b<0$
(3) $a>0$, $D=b^2-4ac<0$
(4) $a<0$, $D=b^2-4ac<0$

대/단/원 평가 문제 [p. 64~65]

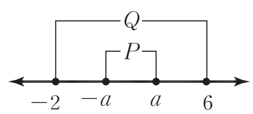
1 ①	**2** ②	**3** ④	**4** ⑤	**5** ⑤
6 ②	**7** ③	**8** ④	**9** ①	**10** ③

11 $\varnothing$, $\{2\}$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{2, 5\}$, $\{2, 7\}$, $\{5, 7\}$　**12** 11
13 $(A\cup B)\cap(C\cup D)^C$　**14** 풀이 참조
15 풀이 참조　**16** 풀이 참조

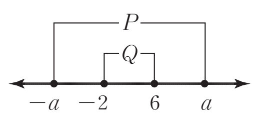
14 (1) 역: xy가 홀수이면 x와 y는 짝수이다. (거짓)
대우: xy가 홀수가 아니면 x 또는 y는 짝수가 아니다. (거짓)
(2) 역: 평행사변형은 직사각형이다. (거짓)
대우: 평행사변형이 아니면 직사각형이 아니다. (참)

15 실수 a에 대하여 주어진 명제의 대우는
'a가 유리수이면 $a+2$는 유리수이다.'
a가 유리수이면 $a=\frac{q}{p}$ (p, q는 정수, $p\ne 0$)로 놓을 수 있으므로 $a+2=\frac{q}{p}+2=\frac{q+2p}{p}$
이때 $q+2p$도 정수이므로 $a+2$는 유리수이다.
따라서 $a+2$가 무리수이면 a는 무리수이다.

16 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면
$P=\{x|-a\le x\le a\}$, $Q=\{x|-2\le x\le 6\}$
(i) p가 q이기 위한 충분조건이려면 $P\subset Q$
오른쪽 그림에서
$-a\ge -2$, $a\le 6$이어야 하므로 $0<a\le 2$



따라서 p가 q이기 위한 충분조건이 되는 a의 최댓값은 2이다.
(ii) p가 q이기 위한 필요조건이려면 $Q\subset P$
오른쪽 그림에서
$-a\le -2$, $a\ge 6$이어야 하므로 $a\ge 6$

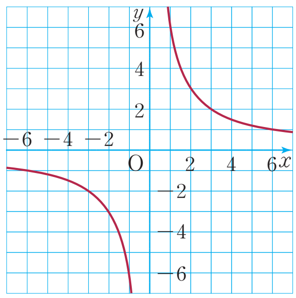


따라서 p가 q이기 위한 필요조건이 되는 a의 최솟값은 6이다.
(i), (ii)에 의하여 구하는 값은 $2+6=8$

Ⅱ 함수

|준|비|학|습| [p. 69]

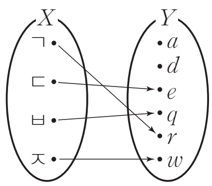
1 (1) 함수이고, 관계식은 $y=1000x$이다.
(2) 함수이고, 관계식은 $y=x^2$이다.
(3) 함수가 아니다.

2 (1) $f(-2)=-3$, $f(1)=6$
(2)


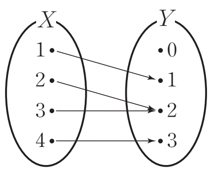
1 함수

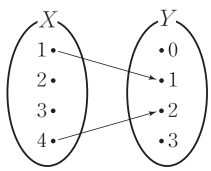
01 대응과 함수 [p. 71~79]

탐구 활동

1


2 누리

1 (1)


(2)


탐구 활동

1 ②, ③ **2** ①, ③ **3** ③

2 (1) 함수이다.
정의역: $\{1, 2, 3\}$, 공역: $\{4, 5, 6\}$, 치역: $\{4, 5\}$
(2) 함수이다.
정의역: $\{a, d, f, s\}$, 공역: {ㄴ, ㅁ, ㄹ, ㅇ},
치역: {ㄴ, ㅁ, ㄹ, ㅇ}
(3) 함수가 아니다.

3 (1) $\{0, 1, 4\}$ (2) $\{-1, 1, 3, 5, 7\}$

4 (1) 정의역: 실수 전체의 집합
치역: 실수 전체의 집합
(2) 정의역: 실수 전체의 집합
치역: $\{y\,|\,y\geq 0$인 실수$\}$
(3) 정의역: 실수 전체의 집합
치역: $\{y\,|\,y\geq -1$인 실수$\}$
(4) 정의역: $\{x\,|\,x\neq 0$인 실수$\}$
치역: $\{y\,|\,y\neq 0$인 실수$\}$

5 $\{-1, 2\}$ **6** ㉠, ㉢

사고력 기르기

용찬이는 두 함수 $f(x)=x$와 $g(x)=x^3$의 식을 비교하여 식이 다르면 서로 다른 함수라고 판정하고 있다. 하지만 두 함수의 정의역이 방정식 $x^3=x$의 해를 원소로 가지는 집합인 $\{-1, 0, 1\}$의 공집합이 아닌 부분집합일 때, 두 함수 f와 g는 서로 같다. 즉, 두 함수 f, g는 정의역에 따라 서로 같은 함수가 될 수 있다. 따라서 연경이의 말이 옳다.

탐구 활동

1 서로 다른 남학생은 반드시 서로 다른 여학생과 짝이 되어야 한다.

2 여학생의 수가 남학생의 수보다 작거나 같아야 한다.

7 일대일함수: ㉡, ㉢, 일대일 대응: ㉢

8 (1) 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1\neq x_2$이면
$f(x_1)-f(x_2)=3x_1+1-(3x_2+1)=3(x_1-x_2)\neq 0$
따라서 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이다.
한편 치역과 공역은 실수 전체의 집합으로 서로 같다.
따라서 함수 $f(x)=3x+1$은 일대일 대응이다.
(2) $f(1)=f(-1)=2$
따라서 함수 $f(x)=x^2+1$은 일대일함수가 아니므로 일대일 대응이 아니다.

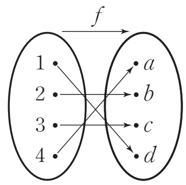
9 $a=-3$, $b=5$

사고력 기르기

(1) 사다리 타기 게임 규칙에 따라 이동하면

$1 \rightarrow d$, $2 \rightarrow b$, $3 \rightarrow c$, $4 \rightarrow a$

이므로 대응을 그림으로 나타내면 오른쪽과 같다.



(2) 사다리 타기의 시작점과 도착점의 개수는 서로 같고, 주어진 그림에서 알 수 있듯이 시작점이 다르면 도착점이 다르다. 따라서 사다리 타기의 시작점과 도착점의 대응은 사다리의 모양에 관계없이 항상 일대일 대응이다.

탐구 활동

1 함수이다. **2** {교장 선생님}

10 일대일 대응: ㉠

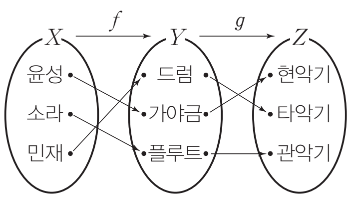
항등함수: ㉠

상수함수: ㉣

02 합성함수와 역함수 [p. 80~88]

탐구 활동

1



2 드럼, 타악기 **3** 함수가 된다.

1 (1) 2 (2) 4

(3) x^2-2x+2 (4) x^2

창의 up

용돈 x원을 10 % 인상하면 $1.1x$원이므로

$f(x)=1.1x$

용돈 x원을 1000원 인하하면 $(x-1000)$원이므로

$g(x)=x-1000$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x-1000)$

$\quad\quad=1.1(x-1000)=1.1x-1100$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(1.1x)=1.1x-1000$

따라서 $g\circ f$가 100원 더 유리하다.

2 (1) $4x^2+8x+4$

(2) $4x^2+8x+4$

탐구 활동

1 h, 정의역 Y의 각 원소에 공역 X의 원소가 하나씩만 대응하여 함수가 되기 위한 조건을 만족시키기 때문이다.

2 f와 g, f의 반대 방향으로의 대응은 정의역의 원소 d에 대응하는 원소가 없으므로 함수가 아니고, g의 반대 방향으로의 대응은 정의역의 원소 b에 대응하는 공역의 원소가 두 개이므로 함수가 아니다.

3 (1) 3 (2) 4

(3) 4 (4) 6

4 (1) 역함수가 존재한다.

역함수: $y=-x+1$

(2) 역함수가 존재하지 않는다.

(3) 역함수가 존재한다.

역함수: $y=3x-3$

5 (1) $a=1$, $b=0$ 또는 $a=-1$

(2) (i) $a=1$, $b=0$일 때

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(x)=x\ (x\in X)$

(ii) $a=-1$일 때

$f(x)=-x+b$이므로

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(-x+b)$

$\quad\quad=-(-x+b)+b$

$\quad\quad=x-b+b=x\ (x\in X)$

따라서 $f\circ f=I$이다.

6 $y=\dfrac{5}{9}(x-32)$를 x에 대하여 정리하면 $x=\dfrac{9}{5}y+32$

변수 x와 y를 서로 바꾸면 섭씨온도 x ℃를 화씨온도 y ℉로 바꾸는 식의 다음과 같다.

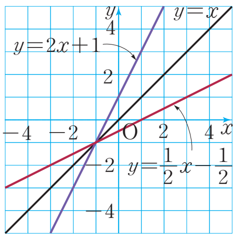
$y=\dfrac{9}{5}x+32$

이때 두 함수는 역함수 관계에 있다.

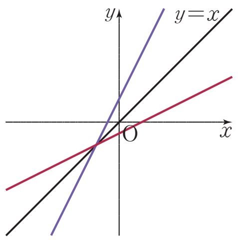
탐구 활동

1 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

2

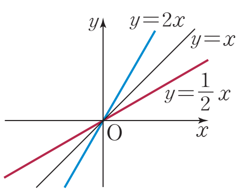


3

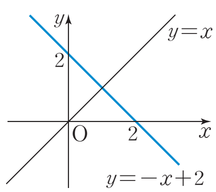


4 두 함수가 서로 포개어진다.

7 (1)



(2)



| 단원 과제 |

(1) $(g\circ f)(a)=g(f(a))=g(211.2xx.51.74)=\mathrm{B}$

(2) $(f^{-1}\circ g^{-1})(\mathrm{C})=f^{-1}(g^{-1}(\mathrm{C}))=f^{-1}(213.2xx.72.11)=b$

중단원 기초 [p.89]

1 ㉡

2 ㉠, ㉡

3 (1) ㉡, ㉣, ㉥ (2) ㉣, ㉥ (3) ㉣ (4) ㉠

4 (1) 4 (2) -2 (3) $4x^2$ (4) $-2x^2$

5 (1) $f^{-1}(x)=x+1$ (2) $g^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

중단원 기본 [p.90]

1 (1) ㉠ 함수이고, 치역은 $\{0, 1\}$이다.

㉡ 함수이고, 치역은 $\{0, 1\}$이다.

㉢ X의 원소 1에 대응하는 Y의 원소가 없으므로 함수가 아니다.

㉣ 함수이고, 치역은 $\{0, 1, 2\}$이다.

(2) ㉣

2 $a=3$, $b=-2$

3 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x-2)$

$=-(x-2)^2=-x^2+4x-4$

$(h\circ(g\circ f))(x)=h((g\circ f)(x))=h(-x^2+4x-4)$

$=-2(-x^2+4x-4)=2x^2-8x+8$

$(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(-x^2)$

$=-2(-x^2)=2x^2$

$((h\circ g)\circ f)(x)=(h\circ g)(f(x))=(h\circ g)(x-2)$

$=2(x-2)^2=2x^2-8x+8$

따라서 $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$이다.

4 f, g는 일대일 대응이므로

$g(f(2))=4$에서 $f(2)=b$이다.

(1) f는 일대일 대응이고, $f(1)=a$, $f(2)=b$이므로 $f(3)=c$

(2) g는 일대일 대응이고, $g(f(2))=g(b)=4$이므로 $(g\circ f)(1)=g(a)=5$

(3) $g(b)=4$이므로 $g^{-1}(4)=b$

(4) $g(a)=5$이므로 $g^{-1}(5)=a$

$f(1)=a$이므로 $f^{-1}(a)=1$

따라서 $(f^{-1}\circ g^{-1})(5)=f^{-1}(a)=1$이다.

5 $x=1$

중단원 실력 [p.91]

1 10

2 $a>1$ 또는 $a<-1$

3 4개

4 $\{1\}$

5 3

2 유리함수와 무리함수

01 유리함수 [p. 93~101]

탐구 활동

1 $\dfrac{15}{v-a}$ **2** $\dfrac{15}{v+a}$ **3** $\dfrac{15}{v-a}+\dfrac{15}{v+a}$

1 (1) $\dfrac{x+1}{x(x-2)(x+1)}$, $\dfrac{3(x-2)}{x(x-2)(x+1)}$

(2) $\dfrac{2x}{x(x-3)(x+1)}$, $\dfrac{x+1}{x(x-3)(x+1)}$

2 (1) $\dfrac{3y^2z}{x}$ (2) $\dfrac{x-1}{x-3}$

3 (1) $\dfrac{2(x^2+2x-5)}{(x+1)(x-1)(x-2)}$ (2) $\dfrac{-2(x+2)}{2x+1}$

4 (1) $\dfrac{(x+1)(3x+2)}{(x+2)^2}$ (2) $\dfrac{x+4}{(x-1)(x+2)}$

탐구 활동

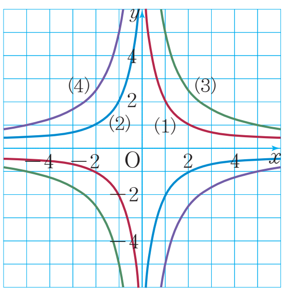
1 $4,\ 2,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}$ **2** 유리식이다.

5 (1) 실수 전체의 집합

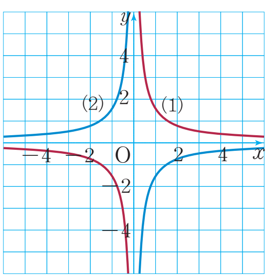
(2) $\{x\,|\,x\neq 1$인 실수$\}$

(3) $\{x\,|\,x\neq -2$인 실수$\}$

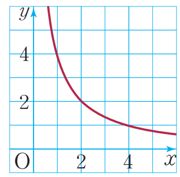
6



7



8 (1) $I=\dfrac{4}{R}$ (2)

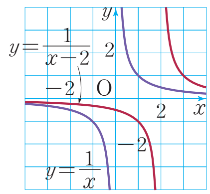


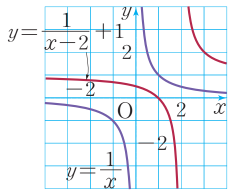
사고력 기르기

직육면체 모양의 상자에서 부피가 일정할 때, 한 밑면의 넓이를 x, 높이를 y라고 하면 $xy=k$ (k는 상수), 즉 $y=\dfrac{k}{x}$의 관계식이 성립한다.

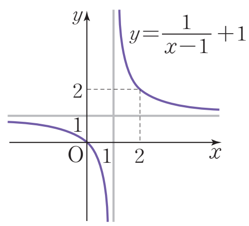
탐구 활동

1 $y=\dfrac{1}{x-2}$ **2** $y=\dfrac{1}{x-2}+1$



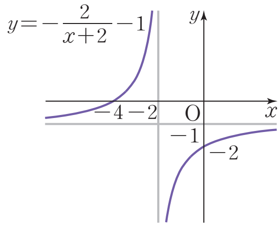


9 (1)



점근선의 방정식: $x=1$, $y=1$

(2)



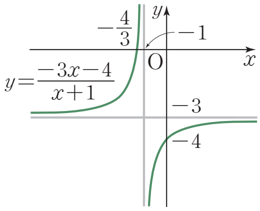
점근선의 방정식: $x=-2$, $y=-1$

탐구 활동

1 $y=\dfrac{1}{x+1}+2$

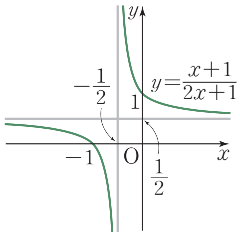
2 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

10 (1)



점근선의 방정식: $x=-1$, $y=-3$

(2)



점근선의 방정식: $x=-\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$

11 $a=2$, $b=-1$

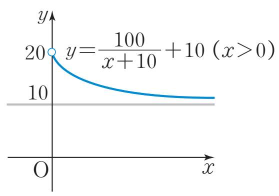
12 농도가 20 %인 설탕물 100 g에 들어 있는 설탕의 양은

$100\times\frac{20}{100}=20(\mathrm{g})$

물 $9x$ g과 설탕 x g을 넣은 후의 농도는

$y=\frac{x+20}{10x+100}\times100=\frac{100}{x+10}+10(\%)$

이때 $x>0$이므로 그래프는 다음 그림과 같고, 점근선의 방정식은 $y=10$이다.



| 단원 과제 |

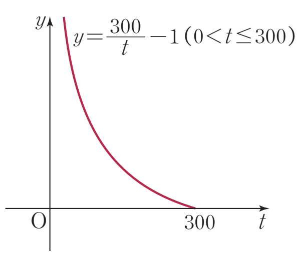
t초 후에 위에 남은 모래의 양은 $(300-t)$g

아래로 떨어진 모래의 양은 t g

$f(t)=\frac{300-t}{t}=\frac{300}{t}-1$

$(0<t\le300)$

따라서 그래프를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



02 무리함수 [p.102~108]

탐구 활동

1 비가 내리는 날: $\sqrt{254\times S\times0.6}$ km/h

눈이 내리는 날: $\sqrt{254\times S\times0.3}$ km/h

2 길이가 10 m: 27.6 km/h

길이가 40 m: 55.2 km/h

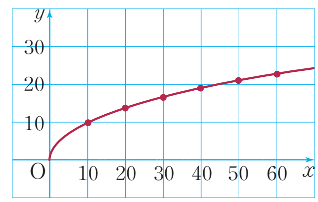
1 (1) $x\ge\frac{1}{2}$ (2) $x<3$ (3) $x\ge2$

2 (1) x^2 (2) $2x+1-2\sqrt{x^2+x}$

탐구 활동

1 9.9, 14, 19.8, 22.1

2



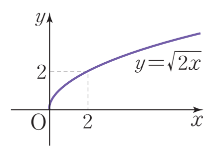
3 (1) 무리함수가 아니다.

(2) 무리함수이다. 정의역: $\left\{x\,\middle|\,x\ge-\frac{3}{2}\right\}$

(3) 무리함수가 아니다.

(4) 무리함수이다. 정의역: $\{x\,|\,x\le4\}$

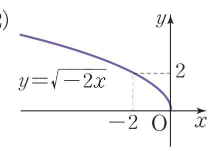
4 (1)



정의역: $\{x\,|\,x\ge0\}$

치역: $\{y\,|\,y\ge0\}$

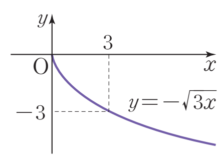
(2)



정의역: $\{x\,|\,x\le0\}$

치역: $\{y\,|\,y\ge0\}$

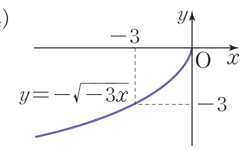
(3)



정의역: $\{x\,|\,x\ge0\}$

치역: $\{y\,|\,y\le0\}$

(4)



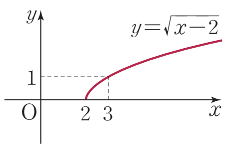
정의역: $\{x\,|\,x\le0\}$

치역: $\{y\,|\,y\le0\}$

탐구 활동

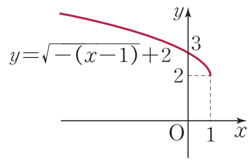
1 $t=\sqrt{10-\frac{1}{5}h}$ **2** $t=\sqrt{-\frac{1}{5}(h+50)}$

5 (1)



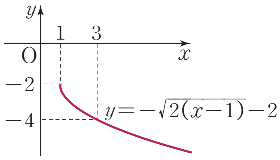
정의역: $\{x\,|\,x\geq 2\}$
치역: $\{y\,|\,y\geq 0\}$

(2)



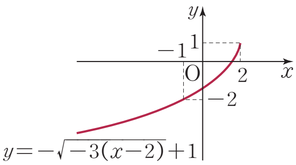
정의역: $\{x\,|\,x\leq 1\}$
치역: $\{y\,|\,y\geq 2\}$

(3)



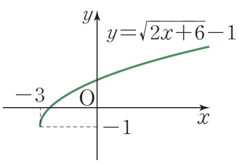
정의역: $\{x\,|\,x\geq 1\}$, 치역: $\{y\,|\,y\leq -2\}$

(4)



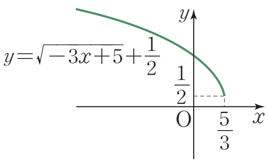
정의역: $\{x\,|\,x\leq 2\}$, 치역: $\{y\,|\,y\leq 1\}$

6 (1)



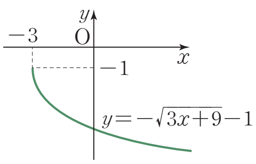
정의역: $\{x\,|\,x\geq -3\}$, 치역: $\{y\,|\,y\geq -1\}$

(2)



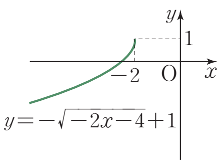
정의역: $\left\{x\,\middle|\,x\leq \frac{5}{3}\right\}$, 치역: $\left\{y\,\middle|\,y\geq \frac{1}{2}\right\}$

(3)



정의역: $\{x\,|\,x\geq -3\}$, 치역: $\{y\,|\,y\leq -1\}$

(4)



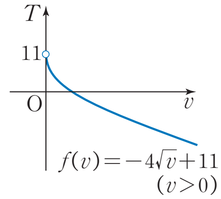
정의역: $\{x\,|\,x\leq -2\}$, 치역: $\{y\,|\,y\leq 1\}$

7 $t=5$, $I=\frac{1}{2}$이므로

$T=5-\sqrt{16v}+12\cdot\frac{1}{2}$

$\quad=-4\sqrt{v}+11$ (단, $v>0$)

따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



중단원 기초 [p.109]

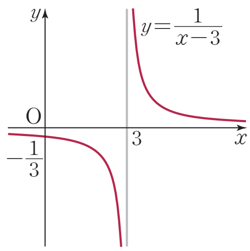
1 (1) $\dfrac{5x}{4y^2}$ (2) $\dfrac{x-4}{x+1}$

2 (1) $y=\dfrac{3}{x-3}+5$ (2) $y=\dfrac{3}{x+4}-2$

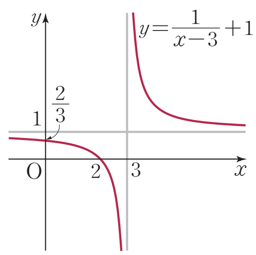
3 (1) $x\geq -1$ (2) $x<2$ (3) $2\leq x\leq 4$

4 (1) $y=\sqrt{2(x-1)}-2$ (2) $y=\sqrt{2(x+1)}+2$

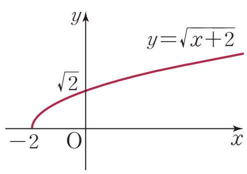
5 (1)



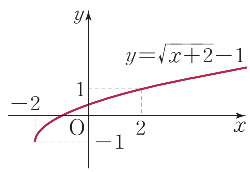
(2)



(3)

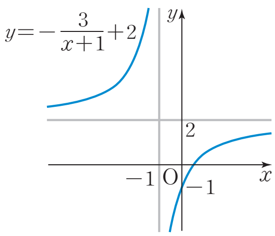


(4)



중단원 기본 [p. 110]

1 (1)

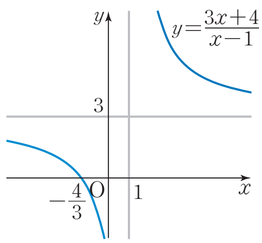


정의역: $\{x\,|\,x\neq-1$인 실수$\}$

치역: $\{y\,|\,y\neq 2$인 실수$\}$

점근선: $x=-1$, $y=2$

(2) $y=\dfrac{3x+4}{x-1}=\dfrac{3(x-1)+7}{x-1}=\dfrac{7}{x-1}+3$

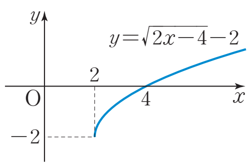


정의역: $\{x\,|\,x\neq 1$인 실수$\}$

치역: $\{y\,|\,y\neq 3$인 실수$\}$

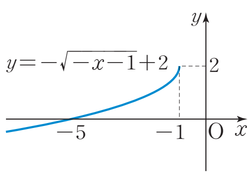
점근선: $x=1$, $y=3$

(3) $y=\sqrt{2x-4}-2=\sqrt{2(x-2)}-2$



정의역: $\{x\,|\,x\geq 2\}$, 치역: $\{y\,|\,y\geq -2\}$

(4) $y=-\sqrt{-x-1}+2=-\sqrt{-(x+1)}+2$



정의역: $\{x\,|\,x\leq -1\}$, 치역: $\{y\,|\,y\leq 2\}$

2 $a=3$, $b=-2$ **3** $a<0$, $b>0$ **4** 3

5 (1) 최댓값은 $x=1$일 때 1이고,

최솟값은 $x=3$일 때 $\frac{1}{2}$이다.

(2) 최댓값은 $x=3$일 때 $\frac{3}{5}$이고,

최솟값은 $x=1$일 때 $\frac{1}{3}$이다.

(3) 최댓값은 $x=3$일 때 $\sqrt{5}-2$이고,

최솟값은 $x=1$일 때 -1이다.

(4) 최댓값은 $x=3$일 때 1이고,

최솟값은 $x=1$일 때 $2-\sqrt{3}$이다.

중단원 실력 [p. 111]

1 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{5}{2}$

2 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 역함수는 $f^{-1}(x)=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$

$f=f^{-1} \iff a=-d$이므로

$p \iff q$ …… ①

한편 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 두 점근선의 교점의 좌표는

$\left(-\dfrac{d}{c},\ \dfrac{a}{c}\right)$이므로 두 점근선이 직선 $y=x$ 위에 있을 필요충분조건은 $\dfrac{a}{c}=-\dfrac{d}{c}$, 즉 $a=-d$이다. 따라서

$r \iff q$ …… ②

①, ②에서 $p \iff q \iff r$이므로 세 조건 p, q, r는 서로 필요충분조건이다.

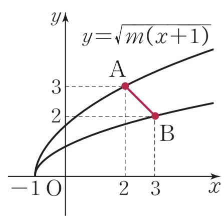
3 $a=2$, $b=4$, $c=1$ **4** $(3,\ 3)$

5 (i) $y=\sqrt{m(x+1)}$의 그래프가 점 A$(2,\ 3)$을 지날 때

$3=\sqrt{m(2+1)}$에서 $m=3$

(ii) $y=\sqrt{m(x+1)}$의 그래프가 점 B$(3,\ 2)$를 지날 때

$2=\sqrt{m(3+1)}$에서 $m=1$



(i), (ii)에 의하여 $y=\sqrt{m(x+1)}$의 그래프가 선분 AB와 만나는 실수 m값의 범위는 $1\leq m\leq 3$

대/단/원 평가 문제 [p. 114~115]

1 ③　2 ③　3 ④　4 ①　5 ③
6 ②　7 ⑤　8 ③　9 ④　10 ③
11 52　12 30
13 (1) $y=\dfrac{10}{x+1}+\dfrac{1}{2}$　(2) 풀이 참조　14 $\dfrac{10}{9}$
15 풀이 참조　16 풀이 참조

6 (i) $x\geq 0$이면 $f(x)=-x\ (y\leq 0)$이므로

$f^{-1}(x)=-x\ (x\leq 0)$

(ii) $x<0$이면 $f(x)=-3x\ (y>0)$이므로

$f^{-1}(x)=-\dfrac{1}{3}x\ (x>0)$

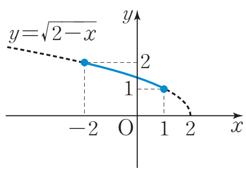
(i), (ii)에서

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}-x & (x\leq 0\text{일 때})\\ -\dfrac{1}{3}x & (x>0\text{일 때})\end{cases}$$

따라서 $f^{-1}(1)=-\dfrac{1}{3}$, $f^{-1}(-1)=1$이므로

$f^{-1}(1)+f^{-1}(-1)=\dfrac{2}{3}$

10 $y=\sqrt{2-x}\ (-2\leq x\leq 1)$의 그래프에서 최솟값은 $x=1$일 때 1이다.



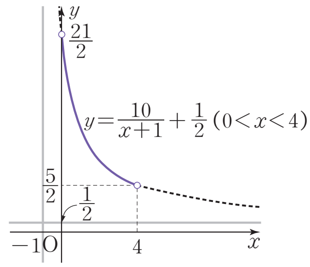
$y=\sqrt{2-x}+a$의 그래프는 $y=\sqrt{2-x}$의 그래프를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 것이다.
이때 최솟값이 2이므로 $1+a=2$에서 $a=1$이다.
따라서 주어진 함수는 $y=\sqrt{2-x}+1$이고, 최댓값은 $x=-2$일 때 $\sqrt{2+2}+1=3$이다.

13 (1) (시간)$=\dfrac{(\text{거리})}{(\text{속력})}$이므로 거리가 10 km인 산책로를 $(x+1)$ km/h의 속력으로 걷는 데 걸리는 시간은 $\dfrac{10}{x+1}$ 시간이다.

또 중간에 30분$\left(=\dfrac{1}{2}\text{시간}\right)$을 쉬었으므로 10 km를 가는 데 걸린 시간 y는

$y=\dfrac{10}{x+1}+\dfrac{1}{2}$(시간)

(2)



15 $x>0$일 때 직선의 기울기가 0보다 작으므로 일대일 대응이 되려면 $x\leq 0$일 때에도 기울기가 0보다 작아야 한다.
즉, $a^2-5a<0$에서 $a(a-5)<0$이므로 $0<a<5$이다.
따라서 조건을 만족시키는 정수 a는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

16 $y=-\sqrt{-x+a}+b=-\sqrt{-(x-a)}+b$이므로 $b=1$이고, $y=-\sqrt{-x+a}+1$의 그래프가 점 $(0,\ -1)$을 지나므로 $-1=-\sqrt{a}+1$에서　$a=4$
따라서 $a=4$, $b=1$이다.

Ⅲ 수열

준비학습 [p. 121]

1 (1) 5, 10　(2) 11, 17　(3) -4, 128

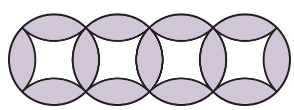
2 (1) $f(1)=2$, $f(6)=17$　(2) $f(1)=2$, $f(6)=72$

1 등차수열과 등비수열

01 수열의 뜻 [p. 123~125]

탐구 활동

1



2 4, 7, 10, 13, ⋯

3 4부터 시작하여 차례로 3씩 늘어난다.

1 (1) 첫째항: 3, 제5항: 11 (2) 첫째항: 1, 제5항: 25

2 (1) $-1, 2, 5, 8, 11$ (2) $-3, 9, -27, 81, -243$
(3) $4, 9, 16, 25, 36$ (4) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

3 (1) $a_n=n^3$ (2) $a_n=\frac{1}{2n-1}$
(3) $a_n=(-1)^n$ (4) $a_n=n(n+1)$

사고력 기르기

올림픽은 4년마다 한 번씩 열리므로 올림픽의 개최 연도를 차례로 나열하면 4씩 늘어나는 규칙을 가진 수열이 된다.

02 등차수열 [p. 126~132]

탐구 활동

1 2, 4, 6, 8, ⋯

2 2부터 시작하여 차례로 2씩 늘어난다.

1 (1) 등차수열이다. 공차: 4
(2) 등차수열이 아니다.
(3) 등차수열이다. 공차: $-\frac{3}{8}$
(4) 등차수열이 아니다.

2 (1) $a_n=3n-1$ (2) $a_n=-4n+7$
(3) $a_n=5n-6$ (4) $a_n=-2n+3$

3 (1) 14 (2) 제20항

4 (1) $a_n=-3n+14$ (2) $a_n=2n-1$

5 (1) 제18항 (2) 제69항

6 $a_n=pn+q$이므로 $a_{n+1}=p(n+1)+q=pn+p+q$
$a_{n+1}-a_n=(pn+p+q)-(pn+q)=p$
이때 p는 상수이므로 이 수열의 이웃하는 두 항의 차는 p로 일정하다.
또 첫째항을 구하면 $a_1=p\times1+q=p+q$
따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $p+q$, 공차가 p인 등차수열이다.

7 (1) $a=8, b=20$ (2) $a=4, b=-10$

8 11, 14, 17, 20

창의 up

경계선 $a_1, a_2, a_3, \cdots$의 곡선 주로는 각각 지름의 길이가 $\frac{200}{\pi}$ m, $\left(\frac{200}{\pi}+1.25\times2\right)$m, $\left(\frac{200}{\pi}+1.25\times4\right)$m, ⋯인 원의 둘레이므로 경계선 a_n의 길이는

$\pi\times\left\{\frac{200}{\pi}+1.25\times(2n-2)\right\}+200$
$=2.5\pi n+400-2.5\pi(\mathrm{m})$

따라서 a_8의 길이는
$2.5\pi\times8+400-2.5\pi=17.5\pi+400(\mathrm{m})$

탐구 활동

1 5개

2 6개

3 $1+2+3+\cdots+9+10$
$=(1+10)+(2+9)+\cdots+(5+6)=55$

9 (1) 60 (2) -220 (3) 10100 (4) -472

10 (1) -10 (2) 10

11 $a_1=S_1=2+3=5$ ⋯⋯ ①
$a_n=S_n-S_{n-1}=4n+1\ (n\ge2)$ ⋯⋯ ②
②에 $n=1$을 대입하면 ①과 같으므로 일반항 a_n은 $a_n=4n+1$이다.
이때 $a_{n+1}-a_n=4$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 5, 공차가 4인 등차수열이다.

12 $a_1=-1, a_n=2n-2\ (n=2, 3, 4, \cdots)$

창의 up

어느 날의 깨어 있는 시간은 14시간이고, 매일 $\frac{1}{4}$시간씩 줄어든다. 어느 날부터 깨어 있는 시간은 등차수열을 이루므로 어느 날을 1일로 하여 n일에 깨어 있는 시간을 a_n시간이라고 하면 $a_n=-\frac{1}{4}n+\frac{57}{4}$

$a_n=-\frac{1}{4}n+\frac{57}{4}=0$에서 $n=57$

따라서 생을 마칠 때까지 깨어 있는 시간의 합은
$\frac{57(14+0)}{2}=399$(시간)

03 등비수열 [p. 133~138]

탐구 활동

1 16, 32, 64, 128

2 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128
2부터 시작하여 차례로 2배가 된다.

1 (1) 등비수열이 아니다. (2) 등비수열이다. 공비: $\frac{1}{3}$
(3) 등비수열이다. 공비: -2 (4) 등비수열이 아니다.

2 (1) $a_1=-2$, $a_n=-2\cdot 3^{n-1}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$
(2) $a_1=12$, $a_n=12\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$
(3) $a_1=\frac{1}{8}$, $a_n=\frac{1}{8}\cdot 4^{n-1}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$
(4) $a_1=1$, $a_n=(-2)^{n-1}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$

3 (1) $a_1=6$, $a_n=6\cdot 2^{n-1}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$
(2) $a_1=2$, $a_n=2\cdot(-3)^{n-1}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$

4 제11항

5 (1) $\begin{cases} a=12 \\ b=192 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a=-12 \\ b=-192 \end{cases}$
(2) $\begin{cases} a=56 \\ b=14 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} a=-56 \\ b=-14 \end{cases}$

6 54, -18, 6, -2

탐구 활동

1 1, 3, 9, 27 **2** 3, 40

7 (1) $3^{10}-1$ (2) $2-\frac{1}{2^{19}}$ (3) -682 (4) $30\sqrt{2}+30$

8 $\frac{1}{2}(3^{10}-1)$

9 $a_1=S_1=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$
$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ $(n\geq 2)$
따라서 이 수열의 일반항 a_n은 $a_1=\frac{1}{3}$, $a_n=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$이다.
이때 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{3}$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{3}$, 공비가 $\frac{2}{3}$인 등비수열이다.

10 1566000원

| 단원 과제 |

(1) 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\sqrt{2}$, 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열이므로
$a_1=\sqrt{2}$, $a_n=(\sqrt{2})^n$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$
(2) $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=2+4+8+16+32$
$=\frac{2(2^5-1)}{2-1}=62$

중단원 기초 [p. 139]

1 (1) $a_n=3$, $a_{10}=3$ (2) $a_n=\frac{1}{n}$, $a_{10}=\frac{1}{10}$
(3) $a_n=(-1)^n\cdot n$, $a_{10}=10$
(4) $a_n=(n+1)(n+3)$, $a_{10}=11\cdot 13$

2 등차수열: ㉠, ㉣, 등비수열: ㉢, ㉤

3 (1) $a_n=2n+3$, $a_{20}=43$
(2) $a_n=-2n+17$, $a_{20}=-23$
(3) $a_1=-3$, $a_n=-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$,
$a_{20}=-\frac{3}{2^{19}}$
(4) $a_1=1$, $a_n=5^{n-1}$ $(n=2, 3, 4, \cdots)$, $a_{20}=5^{19}$

4 (1) -270 (2) $-2^{20}+1$

5 1, $n-1$, $n-1$, $4n-3$, $4n-3$

중단원 기본 [p. 140]

1 79

2 (1) 180 (2) 21 (3) $\frac{1023}{1024}$ (4) -255

3 (1) 1090 (2) 1023

4 $5\sqrt{6}$, 30, $30\sqrt{6}$ 또는 $-5\sqrt{6}$, 30, $-30\sqrt{6}$

5 3135000원

중단원 실력 [p.141]

1 가로 첫 번째 줄은 첫째항이 1, 공차가 1인 등차수열이다.

1	2	3	4	5	6
-1					9
-3		㉠			12
-5			㉡		15
-7					18
					21

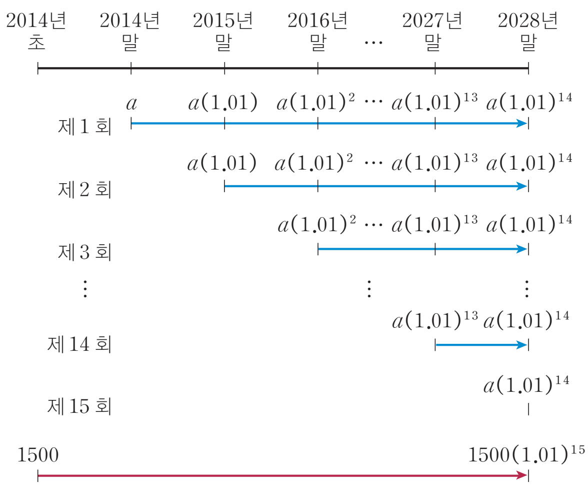
세로 첫 번째 줄의 수열을 $\{a_n\}$이라고 하면 $a_1=1$, $a_5=-7$이므로 $a_n=-2n+3$이다.
세로 6번째 줄의 수열을 $\{b_n\}$이라고 하면 $b_1=6$, $b_6=21$이므로 $b_n=3n+3$이다.
따라서 ㉠은 3이고, ㉡은 7이다.

2 $r=0$

3 $a_n=\dfrac{10^n-1}{9}$

4 공비가 r^5인 등비수열을 이룬다.

5



2014년 말에 갚는 돈을 a만 원이라고 하면
$15a(1.01)^{14}=1500(1.01)^{15}$, $a=100\times1.01=101$
따라서 2014년 말에 갚는 돈은 101만 원이다.

2 수열의 합

01 $\sum$의 뜻과 성질 [p.143~145]

탐구 활동

1 $10a$

2 $3k$의 k에 1, 2, 3, 4, $\cdots$, 100을 차례로 대입하여 얻은 수의 합

1 (1) $2+4+8+16+32$

(2) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$

(3) $1+8+27+64+125$

(4) $2+1+0+\cdots+(3-n)$

2 (1) $\sum\limits_{k=1}^{11}(2k-1)$ (2) $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$

(3) $\sum\limits_{k=1}^{7}3\cdot2^{k-1}$ (4) $\sum\limits_{k=1}^{n}k(k+1)$

3 (1) 5 (2) -11

사고력 기르기

수열 9, 99, 999, $\cdots$는 $10-1$, 10^2-1, 10^3-1, $\cdots$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}(10^k-1)=\sum_{k=1}^{10}10^k-\sum_{k=1}^{10}1$$
$$=\frac{10(10^{10}-1)}{10-1}-10=\frac{10^{11}-10^2}{9}$$

따라서 $a=2$, $b=9$이다.

| 단원 과제 |

5, 9, 6, $2k$

02 여러 가지 수열의 합 [p.146~150]

탐구 활동

1 첫 번째 그림에서 세 정육면체의 부피의 합 $1^3+2^3+3^3$은 마지막 그림에서 직육면체의 부피 $(1+2+3)^2$과 같으므로 $1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$

2 주어진 그림의 직육면체의 부피는 한 변의 길이가 각각 1, 2, 3, 4인 정육면체의 부피의 합과 같으므로 $1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2$

1 항등식 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$의 k에 1, 2, 3, $\cdots$, n을 차례로 대입하여 n개의 등식을 변끼리 더하여 정리하면

$$(n+1)^4-1^4=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$$

따라서 $\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$이 성립한다.

2 (1) 2870 (2) 44100 (3) 1240 (4) 14400

3 (1) 2779 (2) 43659

4 (1) 3795 (2) 215

5 (1) $\frac{n(n+1)(n+5)}{3}$ (2) $\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

6 (1) $\frac{n}{2n+4}$ (2) $\frac{n(3n+5)}{2(n+1)(n+2)}$

7 (1) $\frac{n}{2n+1}$ (2) $\sqrt{n+1}-1$

중단원 기초

[p. 151]

1 (1) $5+9+13+17+21$
(2) $0+3+8+15+24+35+48+63$
(3) $-2+4+(-8)+16+\cdots+(-2)^n$
(4) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}$

2 (1) $\sum_{k=1}^{n}k$ (2) $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k$
(3) $\sum_{k=1}^{n}(3k-2)$ (4) $\sum_{k=1}^{n}k(k+2)$

3 (1) 4 (2) 47

4 (1) 55 (2) 385 (3) 3025

5 (1) 95 (2) 645

중단원 기본

[p. 152]

1 160

2 (1) -59 (2) 20

3 (1) $\frac{n(2n+1)(4n-5)}{3}$ (2) $\frac{4n(n-1)(n+1)}{3}$

4 (1) $\frac{n(n+1)(3n^2+n-1)}{6}$ (2) $\frac{n(5n+13)}{12(n+2)(n+3)}$

5 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

중단원 실력

[p. 153]

1 6

2 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

3 235

4 $-\frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{15}{2}$

5 20

3 수학적 귀납법

01 수열의 귀납적 정의

[p. 155~157]

탐구 활동

1 2개의 원판을 다른 한 막대로 모두 옮기는 데 필요한 원판의 최소 이동 횟수는 3이므로 $a_2=3$이다.

2 7

3 $a_3=2a_2+1$

1 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 12 (3) 74 (4) 31

2 (1) 30
(2) $a_{n+1}=2a_n-10$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$
(3) 170

| 단원 과제 |

$a_1=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2\right)\times\frac{3}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{16}$ 이고, $(n+1)$번째에는 n번째에 색칠된 넓이의 $\frac{3}{4}$만큼 색칠되므로 $a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n$

$n=1$일 때, $a_2=\frac{3}{4}a_1=\frac{3}{4}\times\frac{3\sqrt{3}}{16}=\frac{9\sqrt{3}}{64}$

$n=2$일 때, $a_3=\frac{3}{4}a_2=\frac{3}{4}\times\frac{9\sqrt{3}}{64}=\frac{27\sqrt{3}}{256}$

02 수학적 귀납법 [p. 158~160]

탐구 활동

1 첫 번째 막대 **2** $(k+1)$번째 막대

1 (1) (i) $n=1$일 때, (좌변)$=1=$(우변)

따라서 $n=1$일 때 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 등식이 성립한다고 가정하면

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2$$

양변에 $(k+1)^3$을 더하면

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$$
$$=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2+(k+1)^3=\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

(2) (i) $n=1$일 때, (좌변)$=3=$(우변)

따라서 $n=1$일 때 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 등식이 성립한다고 가정하면

$$1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots+k(k+2)$$
$$=\frac{k(k+1)(2k+7)}{6}$$

양변에 $(k+1)(k+3)$을 더하면

$$1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots+k(k+2)+(k+1)(k+3)$$
$$=\frac{k(k+1)(2k+7)}{6}+(k+1)(k+3)$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

2 (i) $n=2$일 때

(좌변)$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}>\frac{2\times2}{2+1}=\frac{4}{3}=$(우변)

따라서 $n=2$일 때 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\ge2)$일 때 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}>\frac{2k}{k+1}$$

양변에 $\frac{1}{k+1}$을 더하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}>\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1}$$
$$=\frac{2k+1}{k+1}$$

그런데 $\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2(k+1)}{k+2}=\frac{k}{(k+1)(k+2)}>0$

이므로 $\frac{2k+1}{k+1}>\frac{2(k+1)}{k+2}$

따라서 $n=k+1$일 때에도 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\ge2$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

중단원 기초 [p. 161]

1 (1) 7, 11, 15, 19 (2) 3, 9, 27, 81

2 $1,\ k+1$ **3** $k^2,\ k+1$

중단원 기본 [p. 162]

1 $a_{n+1}=a_n+n+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

2 $1,\ k^3+5k+6,\ k^3+5k+6,\ k+1$

3 (1) (i) $n=1$일 때, (좌변)$=\frac{1}{2}=$(우변)

따라서 $n=1$일 때 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

양변에 $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$을 더하면

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{(k+1)+1}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

(2) (ⅰ) $n=5$일 때, (좌변)$=2^5=32>5^2+1=26=$(우변)

따라서 $n=5$일 때 부등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k\ (k\ge5)$일 때 부등식이 성립한다고 가정하면

$2^k>k^2+1$

양변에 2를 곱하면 $2^{k+1}>2k^2+2$

그런데 $(2k^2+2)-\{(k+1)^2+1\}=k^2-2k>0$이므로 $2k^2+2>(k+1)^2+1$

따라서 $n=k+1$일 때에도 부등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $n\ge5$인 모든 자연수 n에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

4 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+10\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

중단원 실력 [p. 163]

1 $a_2=\frac{2}{1}a_1,\ a_3=\frac{3}{2}a_2,\ \cdots,\ a_{15}=\frac{15}{14}a_{14}$를 변끼리 곱하면

$a_2\times a_3\times\cdots\times a_{15}$

$=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{15}{14}\times a_1\times a_2\times\cdots\times a_{14}$

따라서 $a_{15}=15a_1=15\times2=30$이다.

2 $2,\ 2,\ kx^2-2kx+k,\ xQ(x)+k$

3 $a_n=n^3+3n^2+2n$이라고 하자.

(ⅰ) $n=1$일 때, $a_1=1^3+3\cdot1^2+2\cdot1=6$

따라서 a_1은 3의 배수이다.

(ⅱ) $n=k$일 때 a_k가 3의 배수라고 가정하면

$a_k=k^3+3k^2+2k=3m$ (m은 자연수)

$n=k+1$일 때

$(k+1)^3+3(k+1)^2+2(k+1)$

$=(k^3+3k^2+2k)+3k^2+9k+6$

$=3m+3(k^2+3k+2)$

$=3(m+k^2+3k+2)$

따라서 $n=k+1$일 때에도 a_n은 3의 배수이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 n^3+3n^2+2n은 3의 배수이다.

4 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+5\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

대/단/원 평가 문제 [p. 166~167]

1 ④	**2** ⑤	**3** ④	**4** ②	**5** ④
6 ①	**7** ②	**8** ②	**9** ③	**10** ②
11 9, 12, 15		**12** 풀이 참조		**13** 10
14 $a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n$		**15** 풀이 참조		
16 풀이 참조				

12 (1) $2S_n=2+2\cdot2^2+3\cdot2^3+4\cdot2^4+\cdots+n\cdot2^n$

(2) $S_n=n\cdot2^n-2^n+1$

15 $S_n=n^2-2n$이므로

$n=1$일 때,

$a_1=S_1=-1$ …… ①

$n\ge2$일 때, $a_n=n^2-2n-\{(n-1)^2-2(n-1)\}$

$=2n-3$ …… ②

②에 $n=1$을 대입하면 ①과 같으므로 이 수열의 일반항은 $a_n=2n-3$이다.

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{2}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{10}\frac{2}{(2k-3)(2k-1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2k-3}-\frac{1}{2k-1}\right)$$
$$=(-1-1)+\left(1-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)$$
$$=-1-\frac{1}{19}=-\frac{20}{19}$$

16 (ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$=1\times2\times3\times\cdots\times(1+p)=$(우변)

따라서 $n=1$일 때 등식이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때 등식이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{l=1}^{k}l(l+1)(l+2)\cdots(l+p)$$
$$=\frac{k}{p+2}(k+1)\cdots(k+p+1)$$

양변에 $(k+1)(k+2)(k+3)\cdots(k+1+p)$를 더하면

$$\sum_{l=1}^{k+1}l(l+1)(l+2)\cdots(l+p)$$
$$=\frac{k+1}{p+2}(k+2)\cdots(k+1+p+1)$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

Ⅳ 지수와 로그

|준|비|학|습| [p.171]

1 (1) 3^7 (2) 2^6 (3) 5^3 (4) 3^3

2 (1) ±2 (2) $\pm\sqrt{5}$ (3) ±3 (4) $\pm\sqrt{7}$

3 (1) 4 (2) $2\sqrt{2}$ (3) $3\sqrt{2}$ (4) $\sqrt{15}$

1 지수

01 거듭제곱과 거듭제곱근 [p.173~177]

탐구 활동

1 524288 **2** 2^{19}

1 (1) ab^{10} (2) $\dfrac{a^{10}}{b^3}$

2 (1) -1 (2) ±3

3 (1) 4 (2) -1 (3) 4 (4) $-\dfrac{1}{3}$

탐구 활동

1 25

2 25
1의 결과와 같다.

4 $(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn}=\{(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^m\}^n=(\sqrt[n]{a})^n=a$
이때 $a>0$이므로 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}>0$이다.
따라서 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$는 a의 양의 mn제곱근이므로 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$가 성립한다.

5 (1) 4 (2) 3 (3) $\dfrac{1}{2}$ (4) 3

6 $p=1$이면 성립하고, $p\ge2$이면
$(\sqrt[np]{a^{mp}})^n=(\sqrt[n]{\sqrt[p]{a^{mp}}})^n=\sqrt[p]{a^{mp}}=(\sqrt[p]{a^m})^p=a^m$
이때 $a>0$이므로 $\sqrt[np]{a^{mp}}>0$이다.
따라서 $\sqrt[np]{a^{mp}}$는 a^m의 양의 n제곱근이므로 $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$이 성립한다.

사고력 기르기

(1) $\sqrt[4]{(-6)^4}=\sqrt[4]{6^4}=6$이므로 $\sqrt[4]{(-6)^4}=-6$은 옳지 않다.

(2) $(-4)^5=-4^5$의 다섯제곱근 중에서 실수인 것은 -4이므로 $\sqrt[5]{(-4)^5}=-4$는 옳다.

(3) $(-\sqrt[5]{7})^5=-(\sqrt[5]{7})^5=-7$이므로 $-\sqrt[5]{7}$은 -7의 다섯제곱근이다. 따라서 $\sqrt[5]{-7}=-\sqrt[5]{7}$은 옳다.

(4) $\sqrt[3]{-2^6}=\sqrt[3]{(-2^2)^3}=\sqrt[3]{-4^3}=-4$이므로 $\sqrt[3]{-2^6}=4$는 옳지 않다.

02 지수의 확장과 지수법칙 [p.178~184]

탐구 활동

1 약 1조 개 **2** 약 $\dfrac{2}{10^7}$ m

1 (1) 1 (2) $\dfrac{1}{81}$ (3) $\dfrac{25}{4}$ (4) -8

2 (1) $n=0$이면 $(ab)^0=1$, $a^0b^0=1$이므로 성립하고,
$n=-p$ (p는 양의 정수)이면

$$(ab)^n=(ab)^{-p}=\frac{1}{(ab)^p}=\frac{1}{a^pb^p}=\frac{1}{a^p}\cdot\frac{1}{b^p}$$
$$=a^{-p}\cdot b^{-p}=a^nb^n$$

(2) $m=0$이면 $a^0\div a^n=1\div a^n=\dfrac{1}{a^n}$, $a^{0-n}=a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$이므로 성립하고,
$n=0$이면 $a^m\div a^0=a^m\div1=a^m$, $a^{m-0}=a^m$이므로 성립한다.
$m=-p$, $n=-q$ (p, q는 양의 정수)라고 하면

$$a^m\div a^n=a^{-p}\div a^{-q}=a^{-p}\div\frac{1}{a^q}=a^{-p}\times a^q$$
$$=a^{-p+q}=a^{m-n}$$

3 (1) a (2) $\dfrac{1}{a^2}$ (3) $\dfrac{a^6}{b^2}$ (4) a^{10}

탐구 활동

1 $\sqrt[3]{2}$ **2** $\dfrac{1}{3}$

4 (1) 8 (2) $\dfrac{1}{3}$ (3) 27 (4) $\dfrac{1}{64}$

5 (1) $a^{\frac{2}{3}}$ (2) $a^{-\frac{3}{4}}$ (3) a

6 (1) $r=\dfrac{m}{n}$ (m, n은 정수, $n>0$)이라고 하면

$$(ab)^r=(ab)^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(ab)^m}=\sqrt[n]{a^m b^m}=\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{b^m}$$
$$=a^{\frac{m}{n}}\cdot b^{\frac{m}{n}}=a^r b^r$$

(2) $r=\dfrac{m}{n}$, $s=\dfrac{p}{q}$ (m, n, p, q는 정수, $n>0$, $q>0$)
라고 하면

$$a^r\div a^s=a^{\frac{m}{n}}\div a^{\frac{p}{q}}=\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}}=\frac{a^{\frac{mq}{nq}}}{a^{\frac{np}{nq}}}=\frac{\sqrt[nq]{a^{mq}}}{\sqrt[nq]{a^{np}}}$$
$$=\sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{np}}}=\sqrt[nq]{a^{mq-np}}=a^{\frac{mq-np}{nq}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}=a^{r-s}$$

7 (1) $a^{\frac{1}{4}}$ (2) $\dfrac{b^4}{a^2}$ (3) $a^{\frac{7}{3}}$ (4) $\dfrac{b}{a}$

8 4배

탐구 활동

1 2.6390, 2.6574, 2.6647

2 2.6651

3 $2^{1.4}$, $2^{1.41}$, $2^{1.414}$의 값은 차례로 점점 커지며 **2**의 결과에 가까워진다.

9 (1) $a^{3\sqrt{2}}$ (2) a (3) a^6b^3 (4) a^2

| 단원 과제 |

1 GiB$=2^{10}$ MiB, 1 TiB$=2^{10}$ GiB이므로
1 MiB$=2^{-10}$ GiB, 1 GiB$=2^{-10}$ TiB이다.
따라서 1 MiB$=2^{-10}$ GiB$=2^{-10}\cdot2^{-10}$ TiB$=2^{-20}$ TiB이다.

중단원 기초 [p. 185]

1 (1) ±7 (2) 5 (3) -4 (4) ±1

2 (1) 3 (2) $\dfrac{1}{3}$ (3) 81 (4) 2

3 (1) 1 (2) $\dfrac{1}{16}$ (3) 9 (4) $\dfrac{8}{27}$

4 (1) $\sqrt[3]{2^4}$ (2) $\sqrt[3]{3^2}$ (3) $\sqrt[4]{5}$ (4) $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

5 (1) $2^{3\sqrt{3}}$ (2) $3^{4\sqrt{2}}$ (3) 5^9 (4) 18

중단원 기본 [p. 186]

1 6

2 (1) 3 (2) -4 (3) 6 (4) 18

3 (1) $a^{-\frac{11}{2}}$ (2) $2a^{\frac{7}{12}}$ (3) 1 (4) $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{6}}$

4 $\dfrac{3}{2}$ **5** 1

중단원 실력 [p. 187]

1 (1) $\sqrt[3]{4}<\sqrt{3}=\sqrt[4]{9}$ (2) $\sqrt[4]{3\sqrt[3]{2}}<\sqrt[3]{2\sqrt{3}}<\sqrt[3]{4^2\sqrt{2}}$

2 15 **3** $\dfrac{1}{16}$ **4** $\dfrac{10}{3}$

5 처음 1만 마리의 박테리아를 배양하여 6시간 후 4만 마리가 되었으므로 $4=1\cdot a^{6k}$에서 $a^{6k}=4$
따라서 배양 후 15시간이 되었을 때 박테리아의 개체 수는 $1\cdot a^{15k}=(a^{6k})^{\frac{5}{2}}=4^{\frac{5}{2}}=(2^2)^{\frac{5}{2}}=2^5=32$(만 마리)

2 로그

01 로그의 뜻과 성질 [p. 189~195]

탐구 활동

1 $\omega\left(\dfrac{2}{3}\right)^4$ **2** $\omega\left(\dfrac{2}{3}\right)^t=\dfrac{1}{2}\omega$

1 (1) $0=\log_2 1$ (2) $2=\log_{10}100$
(3) $\dfrac{1}{2}=\log_5\sqrt{5}$ (4) $-2=\log_3\dfrac{1}{9}$

2 (1) $2^3=8$ (2) $27^{\frac{1}{3}}=3$
(3) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}=25$ (4) $2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$

3 (1) 6 (2) -3 (3) 5 (4) $\dfrac{3}{2}$

4 (1) $\sqrt{5}$ (2) $\dfrac{1}{9}$

사고력 기르기

$\log_a N$에서 밑 a는 $a>0$, $a\neq1$이고, 진수 N은 $N>0$이다. $(-2)^2=4$는 옳지만 이것을 $\log_{-2}4=2$와 같이 나타내면 밑이 음수가 되므로 로그의 정의에 위배된다.
따라서 $a^x=N$의 꼴을 모두 $x=\log_a N$의 꼴로 나타낼 수 있는 것은 아님을 알 수 있다.

탐구 활동

1 $\log_2 3=m$, $\log_2 5=n$

2 $m+n=\log_2 3+\log_2 5$

3 $\log_2 15=m+n$, $\log_2 3+\log_2 5=\log_2 15$

5 $\log_a N=n$이라고 하면 로그의 정의에 의하여 $N=a^n$
지수법칙에 의하여 $N^k=(a^n)^k=a^{nk}$
로그의 정의에 의하여 $\log_a N^k=nk=k\log_a N$

6 (1) 1 (2) 1 (3) 4 (4) 3

7 (1) 4 (2) -1

8 (1) $a+b$ (2) $2a+2b$
(3) $1-a-b$ (4) $\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b$

탐구 활동

1 $\log_2 4=2$

2 $\frac{\log_c 4}{\log_c 2}=2$

3 $\log_2 4=\frac{\log_c 4}{\log_c 2}$

9 (1) $\frac{4}{3}$ (2) 4 (3) 1 (4) 2

10 (1) $1+\frac{2b}{a}$ (2) $\frac{a+b}{2a+2}$

사고력 기르기

(1) $\log_a b=\frac{\log_b b}{\log_b a}=\frac{1}{\log_b a}$

(2) $\log_{a^m} b^n=\frac{\log_a b^n}{\log_a a^m}=\frac{n\log_a b}{m\log_a a}=\frac{n}{m}\log_a b$

02 상용로그 [p.196~198]

탐구 활동

1 5 **2** 10000배

1

N	$\log N$
0.001	-3
0.1	-1
1	0
$\sqrt[3]{10}$	$\frac{1}{3}$
100	2
$100\sqrt{10}$	$\frac{5}{2}$
1000	3

2 (1) 0.7185 (2) 0.9455

사고력 기르기

$\log 814=\log(100\times8.14)=\log100+\log8.14$
$=2+0.9106=2.9106$
$\log0.0814=\log(0.01\times8.14)=\log0.01+\log8.14$
$=\log10^{-2}+\log8.14=-2+0.9106$
$=-1.0894$

3 약 296억 원 **4** $\sqrt{10}$ W

| 단원 과제 |

시리우스의 밝기를 l_s, 북극성의 밝기를 l_k라고 하면 시리우스의 겉보기 등급이 -1.4, 북극성의 겉보기 등급이 2.5이므로 다음이 성립한다.

$-1.4-2.5=-2.5\log\frac{l_s}{l_k}$, $\log\frac{l_s}{l_k}=\frac{39}{25}=1.56$

$\log36.3=1.56$이므로 $\frac{l_s}{l_k}=36.3$

따라서 시리우스의 밝기는 북극성의 밝기의 약 36.3배이다.

중단원 기초 [p.199]

1 (1) $x=\log_5 7$ (2) $x=\log_{\frac{1}{3}} 2$

2 (1) 0 (2) 1 (3) 1 (4) -3

3 (1) 3 (2) -1 (3) $-\frac{1}{2}$ (4) 4

4 (1) 0.4900 (2) 0.7889 (3) 2.17 (4) 5.01

5 1000

중단원 기본 [p. 200]

1 (1) 27 (2) $\sqrt{3}$

2 4

3 (1) $b-a$ (2) $\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b$

(3) $\frac{b}{a}$ (4) $\frac{a+b}{b}$

4 (1) 4 (2) 6 (3) $\frac{5}{2}$ (4) 1

5 0.0212, 40, 0.848, 7.05

중단원 실력 [p. 201]

1 $\frac{1}{2}$

2 $2^x=9^y=18^z=k$ (k는 상수)로 놓고, 각 변에 밑이 10인 로그를 취하면

$\log_{10}2^x=\log_{10}9^y=\log_{10}18^z=\log_{10}k$

$x\log_{10}2=y\log_{10}9=z\log_{10}18=\log_{10}k$

$\frac{1}{x}=\frac{\log_{10}2}{\log_{10}k}$, $\frac{1}{y}=\frac{\log_{10}9}{\log_{10}k}$, $\frac{1}{z}=\frac{\log_{10}18}{\log_{10}k}$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{\log_{10}2}{\log_{10}k}+\frac{\log_{10}9}{\log_{10}k}-\frac{\log_{10}18}{\log_{10}k}$$

$$=\frac{\log_{10}\frac{2\times9}{18}}{\log_{10}k}=\frac{\log_{10}1}{\log_{10}k}=0$$

3 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3\alpha+\log_3\beta=8$, $\log_3\alpha\cdot\log_3\beta=2$

$\log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha$

$$=\frac{\log_3\beta}{\log_3\alpha}+\frac{\log_3\alpha}{\log_3\beta}=\frac{(\log_3\beta)^2+(\log_3\alpha)^2}{\log_3\alpha\cdot\log_3\beta}$$

$$=\frac{(\log_3\alpha+\log_3\beta)^2-2\log_3\alpha\cdot\log_3\beta}{\log_3\alpha\cdot\log_3\beta}=30$$

4 -2

5 빛의 밝기가 처음의 25 %가 되려면 n장의 유리를 통과시켜야 한다고 하자.

1장의 유리를 통과할 때마다 빛의 밝기가 20 %씩 줄어들므로 $(0.8)^n=0.25$

양변에 상용로그를 취하면

$\log(0.8)^n=\log0.25$, $n\log0.8=\log0.25$

$-0.1n=-0.6$, $n=6$

따라서 6장의 유리를 통과시켜야 한다.

대/단/원 평가 문제 [p. 204~205]

1 ①	**2** ①	**3** ⑤	**4** ⑤	**5** ④
6 ③	**7** ③	**8** ③	**9** ④	**10** ②
11 ④	**12** $5^{\sqrt{2}}$	**13** $\frac{7}{8}$	**14** 56	**15** -5
16 풀이 참조		**17** 풀이 참조		

11 $\log(\log_2 3)+\log(\log_3 4)+\log(\log_4 5)+\cdots$

$+\log(\log_{63}64)$

$=\log(\log_2 3\times\log_3 4\times\log_4 5\times\cdots\times\log_{63}64)$

$$=\log\left(\frac{\log3}{\log2}\times\frac{\log4}{\log3}\times\frac{\log5}{\log4}\times\cdots\times\frac{\log64}{\log63}\right)$$

$$=\log\left(\frac{\log64}{\log2}\right)=\log(\log_2 64)=\log(\log_2 2^6)=\log6$$

15 $a^3b^2=1$에서 $b^2=\frac{1}{a^3}=a^{-3}$, $b^4=(a^{-3})^2=a^{-6}$

따라서 $\log_a ab^4=\log_a a\cdot a^{-6}=\log_a a^{-5}=-5$이다.

16 $10^{0.8}$의 값을 구하기 위하여 $\log10^{0.8}$의 값을 계산하면

$\log10^{0.8}=0.8\log10=0.8$

상용로그표에서 $\log6.31=0.8$이므로 $10^{0.8}$은 약 6.31이다.

17 피자 16조각을 데우는 데 걸리는 시간이 피자 2조각을 데우는 데 걸리는 시간의 a배라고 하면

$1.2\times16^{\frac{1}{2}}=a\times1.2\times2^{\frac{1}{2}}$

$16^{\frac{1}{2}}=a\times2^{\frac{1}{2}}$

$a=16^{\frac{1}{2}}\div2^{\frac{1}{2}}=(2^4)^{\frac{1}{2}}\div2^{\frac{1}{2}}=2^{2-\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}}$

따라서 피자 16조각을 데우는 데 걸리는 시간은 피자 2조각을 데우는 데 걸리는 시간보다 $2^{\frac{3}{2}}$배 더 걸린다.

상용로그표

1

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298
2.7	.4314	.4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	.6776	.6785	.6794	.6803
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	.6946	.6955	.6964	.6972	.6981
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	.7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	.7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396

상용로그표 ②

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996

용어

기호

사진 자료 출처

셔터스톡 • • 10쪽, 12쪽, 14쪽, 17쪽, 24쪽, 25쪽, 35쪽, 36쪽, 44쪽, 53쪽, 54쪽, 56쪽, 70쪽, 87쪽, 88쪽, 98쪽, 122쪽, 123쪽, 126쪽, 129쪽, 133쪽, 138쪽, 142쪽, 143쪽, 145쪽, 158쪽, 164쪽, 169쪽, 170쪽, 172쪽, 183쪽, 184쪽, 188쪽

유로크레온 • • 12쪽, 123쪽, 142쪽

이미지클릭 • • 120쪽

토픽이미지 • • 13쪽, 15쪽, 18쪽, 24쪽, 36쪽, 37쪽, 38쪽, 66쪽, 68쪽, 78쪽, 80쪽, 92쪽, 101쪽, 123쪽, 133쪽, 173쪽, 178쪽, 187쪽, 189쪽, 196쪽, 201쪽

기타 • • 한국학중앙연구원(http://www.aks.ac.kr) – 42쪽

인용 자료 출처

13쪽, 대한태권도협회(http://www.koreataekwondo.org)
15쪽, 한국전통소리문화(http://www.koreamusic.org)
22쪽, 두산백과사전 두피디아(http://www.doopedia.co.kr)
29쪽, 국립중앙박물관, 태극기, 국립중앙박물관, 2008, pp.38
36쪽, 이종훈, 소크라테스의 삶과 죽음, 이담Books, 2012
42쪽, 김균태 외 5인, 한국 고전소설의 이해, 박이정, 2012, pp.376~380
44쪽, 홍영남, 생명과학 이론과 응용, 라이프사이언스, 2007, pp.370~393
52쪽, 김성일, 고사성어 대사전, 시대의창, 2013, pp.509
56쪽, 두산백과사전 두피디아(http://www.doopedia.co.kr)
62쪽, Martin Gardner(이충호 역), 이야기 파라독스, 사계절, 1990, pp.15
66쪽, 이광연, 이광연의 수학블로그, 살림Friends, 2008, pp.151~159
70쪽, IT동아(http://it.donga.com)
80쪽, 오선화, 음악치료의 이해, 홍익재, 2004, pp.163
87쪽, 안용근, 일반화학, 효일문화사, 1996, pp.15
92쪽, 두산백과사전 두피디아(http://www.doopedia.co.kr)
93쪽, 두산백과사전 두피디아(http://www.doopedia.co.kr)
96쪽, 두산백과사전 두피디아(http://www.doopedia.co.kr)
102쪽, 동부화재(http://www.idongbu.com)
104쪽, 기상청(http://www.kma.go.kr)
107쪽, 한양대학교 물리학과 물리학교재연구실, 실사구시의 물리학, 한양대학교출판부, 2005, pp.115
108쪽, 기상청(http://www.kma.go.kr)
112쪽, 한양대학교 물리학과 물리학교재연구실, 실사구시의 물리학, 한양대학교출판부, 2005, pp.154
116쪽, 이광연, 또 웃기는 수학이지 뭐야, 경문사, 2002, pp.66~74
122쪽, 이치원, 광학과 레이저: 그 원리와 이용, 공주대학교출판부, 2011, pp.135~136
122쪽, 한국카메라박물관(http://www.kcpm.or.kr)
123쪽, Cedric Ray, Jean-Claude Poizat(안수연 역), 일상 속의 물리학, 에코리브르, 2009, pp.10~31
126쪽, 김부윤, 이지성, 체험으로 즐기는 수학, 수학사랑, 2008, pp.155
132쪽, 김승태, 드무아브르가 들려주는 정규분포 이야기, 자음과모음, 2009, pp.30~31
133쪽, 이광연, 웃기는 수학이지 뭐야, 경문사, 2010, pp.128~131
142쪽, Graham Hancock(김정환 역), 신의 거울, 김영사, 2000, pp.50~53
146쪽, Roger B. Nelsen, Proofs without words, MAA, 1993, pp.86
155쪽, 네가미 세이야, 하노이의 탑, 해나무, 2009, pp.235~236
164쪽, John Farey, Philosophical Magazine vol 47, 1816, pp.385~386
168쪽, Malcolm E. Lines(이충호 역), 놀랄만한 수학 아이디어와 문제들, 가람기획, 2004, pp.41~55
172쪽, 두산백과사전 두피디아(http://www.doopedia.co.kr)
173쪽, 이용환, 디지털 이미지론, 눈빛, 2003, pp.37~38
178쪽, 두산백과사전 두피디아(http://www.doopedia.co.kr)
188쪽, 두산백과사전 두피디아(http://www.doopedia.co.kr)
189쪽, 미생물 · 면역분과학회, 최신면역학, 라이프사이언스, 2011, pp.201~212
196쪽, 과학동아(http://science.dongascience.com)
196쪽, 아시아경제(http://www.asiae.co.kr)
198쪽, Hannu Karttunen 외 4인(강혜성 외 6인 역), 기본 천문학, 시그마프레스, 2008, pp.102~103
199쪽, 한국과학창의재단 사이언스올(http://www.scienceall.com)
202쪽, 안전보건공단(http://www.kosha.or.kr)

집필진

* **신항균** 서울교육대학교 총장
이계세 병점고등학교 교사
박상의 장충고등학교 교사
이광연 한서대학교 교수
김정화 서울사대부설고등학교 교사
서원호 청원고등학교 교감
박세원 신경대학교 교수
박문환 인천인제고등학교 교사
전제동 창원중앙고등학교 교사
신범영 청담중학교 교감
윤정호 대구과학고등학교 교사
이동흔 하나고등학교 교사

* 표시는 집필진 책임자임

인천광역시교육청 인정도서심의회 위원

* **박규홍** 서원대학교
정옥경 인천신현고등학교
김동수 신명여자고등학교
정미라 제물포고등학교
최중근 인천초은고등학교
이진 세일고등학교
양재원 인천영선고등학교
양혜순 인천부흥고등학교
권태룡 동인천고등학교
김현옥 신송고등학교
민선애 인천공항고등학교
권봉희 인천송천고등학교
서순옥 인천예술고등학교
김윤수 검단고등학교
안유진 인천진산과학고등학교
유영신 인천상정고등학교
배수아 인천산곡고등학교
박제남 인하대학교
오흥준 초당대학교
배재형 경희대학교
김성기 계산고등학교
전경환 인하대학교사범대학 부속고등학교
서동희 인천고잔고등학교
조준호 인명여자고등학교
김미경 연송고등학교
이재성 인천공항고등학교
배혜정 옥련여자고등학교
임병태 영종국제물류고등학교
이종현 작전여자고등학교
강신석 인천과학고등학교
김희경 도림고등학교
윤세정 부광고등학교
류주현 부평여자고등학교
김윤정 인천국제고등학교
김진영 인천진산과학고등학교
장은하 부개여자고등학교
박진상 인천외국어고등학교
박영경 세일고등학교
이재정 인천남동고등학교
조성현 인천원당고등학교
김복수 송도고등학교
정문자 수원대학교
이종성 인하대학교
김병학 경희대학교
김대흥 신송고등학교
허석 부개고등학교
박희성 인천영종고등학교
성미애 부개여자고등학교
전효진 가림고등학교
윤효진 인천고등학교
오경민 학익고등학교
김종오 광성고등학교
이선희 문일여자고등학교
유경민 연수여자고등학교
우연희 서운고등학교
이혜연 백석고등학교
박은희 연수고등학교
조영식 인천부흥고등학교
신은주 인일여자고등학교
김성래 광성고등학교
함유선 인천여자고등학교
박종호 안남고등학교
문정연 연수여자고등학교
임승희 인제고등학교
이대성 부광고등학교
이재원 금오공과대학교
조규근 명지대학교
이재혁 이화여자대학교
김경선 인천가정고등학교
윤기운 인천여자고등학교
한경호 학익여자고등학교
최항철 인천국제고등학교
고명호 인천국제고등학교
차요섭 인천대건고등학교
김현희 인일여자고등학교
신선희 인천청라고등학교
고아라 부평고등학교
박숭열 인천예일고등학교
김성식 부광여자고등학교
최미희 작전고등학교
김기선 인천광성중학교
홍지연 인천신현고등학교
고현숙 학익여자고등학교
문서영 인천청라고등학교
최윤호 연수고등학교
안현태 강화고등학교
김장회 인천예일고등학교
이주영 인천송천고등학교
고석구 건국대학교
류희수 경인교육대학교
오종철 군산대학교
이동환 부산교육대학교
박용회 계산고등학교
고일석 계양고등학교
김혜경 검단고등학교

* 표시는 심의회 위원장임

인천광역시교육청 인정도서 감수 위원

* **허민** 광운대학교
김영석 진주동명고등학교
류기문 청주대학교
안창호 인천신현고등학교
이상욱 수원대학교
정정희 충북대학교사범대학 부설고등학교
조준혁 동천고등학교
허난 경기대학교
강일선 순창고등학교
김영호 창원대학교
박세복 상주중학교
오동렬 대구과학고등학교
이성애 구지중학교
정조영 진주동명고등학교
지창원 안법고등학교
허홍범 강구정보고등학교
김대중 대전과학고등학교
김지애 선린인터넷고등학교
박수철 경북자동차고등학교
우성욱 경상고등학교
이준희 대전지족고등학교
정희선 성균관대학교
최소영 동국대학교
김성수 신능중학교
김춘희 한얼중학교
송해준 보성고등학교
우정민 창원과학고등학교
이화영 상계고등학교
조상범 한양대학교
표재홍 강원대학교

* 표시는 감수 위원 책임자임

만든 사람들

개발 책임 김영호
편집 김경수, 윤준원, 천세규, 최윤정, 김은빛, 이유희
표지 디자인 김의수
본문 디자인 박현신
삽화 김성남
컷 맥컴

인천광역시교육청에서 2013년 8월 30일 인정 승인을 하였음.

고등학교 수학II

2014. 3. 1. 초판 발행 정가 원
지은이: 신항균 외 11인
발행인: (주)지학사 서울시 마포구 신촌로 6길 5
인쇄인: (주)벽호 경기도 파주시 한빛로 43

이 교과서의 본문 용지는 우수 재활용 제품 인증을 받은 재활용 종이를 사용했습니다.

교과서에 대한 문의사항이나 의견이 있는 분은 한국교과서연구재단이 운영하는 **교과서민원바로처리센터**(전화 1566-8572, 누리집 주소 http://www.textbook114.com 또는 http://www.교과서114.com)에 문의하여 주시기 바랍니다.

이 도서에 게재된 저작물에 대한 보상금은 문화체육관광부 장관이 정하는 기준에 따라 **사단법인 한국복제전송저작권협회**(전화 02-2608-2800, 누리집 주소 www.korra.kr)에서 저작재산권자에게 지급합니다.

내용 관련 문의: (주)지학사 콘텐츠본부 수학팀 전화 02-330-5440 전송 02-325-8009
구입 관련 문의: (주)지학사 영업본부 영업관리팀 전화 02-330-5302 전송 02-325-8010
공급 업무 대행: 사단법인 한국검인정교과서 경기도 파주시 조리읍 당재봉로 29-28
개별 구입 안내: 누리집 주소 www.ktbook.com 전화 02-3663-5409~12 (사)한국검인정교과서

ISBN 978-89-05-04012-3 53410

고|등|학|교 수학 Ⅱ

53410
9 788905 040123
ISBN 978-89-05-04012-3